1b. Sposoby zapisu i macierze grafów

Grzegorz Kosiorowski

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

Funkcyjna definicja grafu

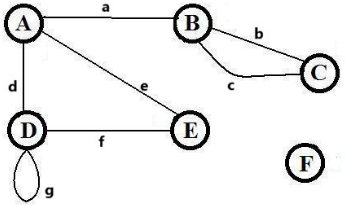
Graf

Grafem lub *grafem ogólnym* nazywamy parę $G = (V, E)$, gdzie:
1) V (czasem zapisywany $V(G)$) jest zbiorem *wierzchołków* (*węzłów*, *punktów*)
2) E (czasem zapisywany $E(G)$) jest multizbiorem *krawędzi* (które mogą się powtarzać), czyli jedno- i dwu-elementowych podzbiorów V.

Graf - alternatywna definicja

Grafem lub *grafem ogólnym* nazywamy trójkę $G = (V, E, \varphi)$, gdzie:
1) V jest zbiorem *wierzchołków* (*węzłów*, *punktów*)
2) E jest zbiorem *krawędzi*.
3) φ jest funkcją ze zbioru E w zbiór jedno- i dwu-elementowych podzbiorów V.

Przykład funkcyjnej definicji grafu



Po prawej zapisuję w skrócie XY zamiast $\{X, Y\}$ i X zamiast $\{X\}$. Jednoelementowa wartość funkcji φ oznacza pętlę.

$$V = \{A, B, C, D, E, F\};$$

$$E = \{a, b, c, d, e, f, g\};$$

x	$\varphi(x)$
a	AB
b	BC
c	BC
d	AD
e	AE
f	DE
g	D

Definicja funkcyjna grafu skierowanego

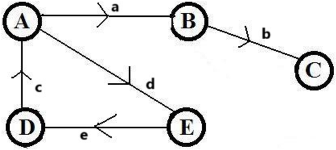
Grafy skierowane

Grafem skierowanym lub *digrafem* nazywamy parę $G = (V, E)$, gdzie:
1) V jest zbiorem *wierzchołków* (*węzłów*, *punktów*)
2) E jest multizbiorem krawędzi skierowanych (które mogą się powtarzać), czyli elementów $V \times V$.

Graf skierowany - alternatywna definicja

Grafem skierowanym nazywamy trójkę $G = (V, E, \varphi)$, gdzie:
1) V jest zbiorem *wierzchołków* (*węzłów*, *punktów*)
2) E jest zbiorem *krawędzi*.
3) φ jest funkcją ze zbioru E w zbiór $V \times V$.

Przykład funkcyjnej definicji grafu skierowanego



$$V = \{A, B, C, D, E\};$$

$$E = \{a, b, c, d, e\};$$

x	$\varphi(x)$
a	(A,B)
b	(B,C)
c	(D,A)
d	(A,E)
e	(E,D)

Dla grafu skierowanego wartościami funkcji φ są pary uporządkowane (ciągi 2-elementowe), a nie podzbiory.

Zapis funkcyjny (lista) i macierzowy w praktyce

- Zwykle grafy są przechowywane w pamięci komputerów właśnie jako listy wartości funkcji φ.
- Niektóre, dedykowane do pracy na grafach, środowiska programowania (*Matlab*, *Scilab*, *Ocatave*) posługują się jednak zapisem macierzowym.
- Macierzowe zapisy grafów są wygodne dla ludzi.
- Macierzowe postaci grafów są też potężnym narzędziem badań grafów (tzw. algebraiczna teoria grafów).

Macierz incydencji dla grafu ogólnego

Macierz incydencji grafu nieskierowanego

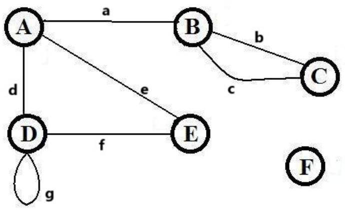
Niech $G = (V, E)$ będzie grafem nieskierowanym, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Wtedy *macierz incydencji* grafu G to:

$$A(G) = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix},$$

gdzie dla $i \in \{1, \ldots, n\}$ i $j \in \{1, \ldots, m\}$

$$a_{ij} = \begin{cases} 2, & \text{jeśli krawędź } e_j \text{ jest pętlą z wierzchołka } v_i; \\ 1, & \text{jeśli } v_i \text{ jest incydentny z } e_j\text{, która nie jest pętlą;} \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Przykład macierzy incydencji



Po prawej macierz incydencji powyższego grafu.

$$V = \{A, B, C, D, E, F\};$$

$$E = \{a, b, c, d, e, f, g\};$$

$$A(G) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Własności macierzy incydencji grafów nieskierowanych

- Suma elementów każdej kolumny macierzy incydencji grafu nieskierowanego wynosi 2.
- Suma elementów wiersza to stopień wierzchołka odpowiadającego temu wierszowi.
- W macierzy incydencji jest tyle wyrazów równych 2, ile jest pętli w grafie. Jeśli w macierzy incydencji występują identyczne kolumny, krawędzie odpowiadające tym kolumnom tworzą w grafie krawędź wielokrotną.
- W zadaniach domyślny porządek wierzchołków i krawędzi grafu to porządek alfabetyczny (jeśli są oznaczone literami) lub taki, jaki na liczbach rzeczywistych (jeśli są oznaczone liczbami).
- Zamiana miejscami dwóch wierszy/dwóch kolumn macierzy incydencji jest równoważna z zamianą nazw (przeetykietowaniem) dwóch wierzchołków/dwóch krawędzi w grafie.

Informacje odczytane z macierzy incydencji grafu ogólnego

$$A(G) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Stopnie wierzchołków grafu G to kolejno: 3,3,2,4,2,0. Ostatni wierzchołek jest wierzchołkiem izolowanym.
- Graf nie jest prosty, bo ma jedną pętlę (przy czwartym wierzchołku) i krawędź wielokrotną (złożoną z krawędzi drugiej i trzeciej).

Macierz incydencji dla grafu skierowanego

Macierz incydencji grafu skierowanego

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem skierowanym bez pętli, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Wtedy *macierz incydencji* grafu G to:

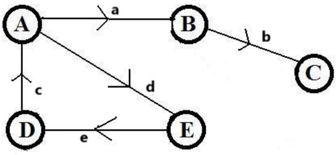
$$A(G) = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix},$$

gdzie dla $i \in \{1, \ldots, n\}$ i $j \in \{1, \ldots, m\}$

$$a_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{jeśli } e_j = (k, i) \text{ dla pewnego } k; \\ 1, & \text{jeśli } e_j = (i, k) \text{ dla pewnego } k; \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Czasem używana jest notacja z przeciwnymi znakami.

Przykład macierzy incydencji grafu skierowanego



Po prawej macierz incydencji powyższego grafu.

$$V = \{A, B, C, D, E\};$$

$$E = \{a, b, c, d, e\};$$

$$A(G) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Własności macierzy incydencji grafów skierowanych

- Suma elementów każdej kolumny macierzy incydencji grafu skierowanego wynosi 0.
- Suma dodatnich elementów wiersza to stopień wyjściowy wierzchołka odpowiadającego temu wierszowi, a wartość bezwzględna z sumy elementów ujemnych wiersza to stopień wejściowy tego wierzchołka.
- Dla grafów skierowanych z pętlami nie tworzy się macierzy incydencji (gdyż pętle „zerowałyby się" przy zaznaczaniu wierzchołków do których wchodzą i wychodzą).
- Zamiana miejscami dwóch wierszy/dwóch kolumn macierzy incydencji jest równoważna z zamianą nazw (przeetykietowaniem) dwóch wierzchołków/dwóch krawędzi w grafie.

Macierz sąsiedztwa dla grafu ogólnego

Macierz sąsiedztwa grafu nieskierowanego

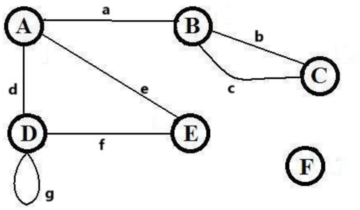
Niech $G = (V, E)$ będzie grafem nieskierowanym, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Wtedy *macierz sąsiedztwa* grafu G to:

$$B(G) = \begin{bmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nn} \end{bmatrix},$$

gdzie dla $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $b_{ij} = b_{ji}$ jest liczbą krawędzi łączących wierzchołki v_i i v_j (pętle liczymy pojedynczo!)

Według niektórych definicji, pętle liczy się w macierzy sąsiedztwa podwójnie.

Przykład macierzy sąsiedztwa



Po prawej macierz sąsiedztwa powyższego grafu.

$$V = \{A, B, C, D, E, F\};$$

$$B(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Własności macierzy sąsiedztwa grafów nieskierowanych

- Macierz sąsiedztwa grafu ogólnego jest kwadratowa (o wymiarze $|V| \times |V|$) i symetryczna.
- Jeśli graf nie zawiera pętli, suma elementów każdego wiersza (lub kolumny) to stopień wierzchołka odpowiadającego temu wierszowi (lub kolumnie).
- Ślad macierzy $B(G)$ (czyli suma elementów na przekątnej tej macierzy) to liczba pętli w grafie nieskierowanym. Graf ma krawędzie wielokrotne, jeśli w macierzy pojawiają się liczby większe od 1.

Informacje odczytane z macierzy sąsiedztwa grafu ogólnego

$$B(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Stopnie wierzchołków grafu G to kolejno: 3,3,2,4,2,0. Dla czwartego wierzchołka stopień nie jest sumą wyrazów odpowiedniego wiersza/kolumny macierzy, bo pętlę (czyli wyraz na przekątnej) w obliczaniu stopnia musimy dodać dwukrotnie.
- Graf nie jest prosty, bo ma jedną pętlę (bo $\operatorname{tr} B(G) = 1$) i krawędź wielokrotną ($b_{23} = b_{32} = 2$).

Macierz sąsiedztwa grafu skierowanego

Macierz sąsiedztwa grafu skierowanego

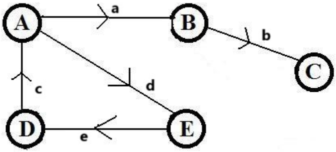
Niech $G = (V, E)$ będzie grafem skierowanym, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Wtedy *macierz sąsiedztwa* grafu G to:

$$B(G) = \begin{bmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nn} \end{bmatrix},$$

gdzie dla $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, b_{ij} jest liczbą krawędzi prowadzących z wierzchołka v_i do wierzchołka v_j (pętle liczymy pojedynczo!)

Według niektórych definicji, pętle liczy się w macierzy sąsiedztwa podwójnie.

Przykład macierzy sąsiedztwa grafu skierowanego



Po prawej macierz sąsiedztwa powyższego grafu.

$$V = \{A, B, C, D, E\};$$

$$B(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Własności macierzy sąsiedztwa grafów skierowanych

- Macierz sąsiedztwa grafu skierowanego jest kwadratowa (o wymiarze $|V| \times |V|$), ale zazwyczaj nie jest symetryczna.
- Suma elementów każdego wiersza to stopień wyjściowy wierzchołka odpowiadającego temu wierszowi, a suma elementów każdej kolumny to stopień wejściowy wierzchołka odpowiadającego tej kolumnie.
- Ślad macierzy $B(G)$ (czyli suma elementów na przekątnej tej macierzy) to liczba pętli w grafie skierowanym.

Informacje odczytane z macierzy sąsiedztwa grafu skierowanego

$$B(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Stopień wejściowy każdego wierzchołka grafu G wynosi 1. Stopnie wyjściowe kolejnych wierzchołków grafu G wynoszą 2, 1, 0, 1, 1.
- Graf jest prosty, bez pętli ($\operatorname{tr} G = 0$) i krawędzi wielokrotnych.

Macierzowe charakterystyki grafu

W prezentacji o izomorfizmach grafów dokładniej omówimy przyczynę, ale warto zwrócić uwagę, że podstawowe charakterystyki liczbowe macierzy sąsiedztwa nie zależą od etykietowania wierzchołków i sposobu narysowania grafu. Dlatego sens ma poniższa definicja:

Macierzowe charakterystyki grafu

Niech G będzie grafem skierowanym lub nieskierowanym. Wtedy:
Wyznacznikiem grafu G ($\det G$) nazywamy wyznacznik jego macierzy sąsiedztwa $\det B(G)$.
Śladem grafu G ($\operatorname{tr} G$) nazywamy ślad jego macierzy sąsiedztwa $\operatorname{tr} B(G)$.
Wielomian charakterystyczny, wartości i wektory własne grafu G to wielomian charakterystyczny, wartości i wektory własne jego macierzy sąsiedztwa.

Badaniem wartości własnych grafów i ich wpływem na własności grafu zajmuje się spektralna teoria grafów.

Interpretacja potęg macierzy sąsiedztwa

Najciekawszą konsekwencją definicji macierzy sąsiedztwa jest interpretacja potęgowania tej macierzy (które jest możliwe, gdyż macierz sąsiedztwa jest kwadratowa).

Twierdzenie o potędze macierzy sąsiedztwa

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem skierowanym lub nieskierowanym, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Wtedy liczba dróg (niekoniecznie prostych) długości n pomiędzy wierzchołkami v_i i v_j wynosi m_{ij}, gdzie m_{ij} jest odpowiednim elementem poniższej macierzy:

$$(B(G))^n = M = \begin{bmatrix} m_{11} & \ldots & m_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ m_{n1} & \ldots & m_{nn} \end{bmatrix}.$$

Wnioski z twierdzenia o potędze macierzy sąsiedztwa

Wniosek 1 z twierdzenia o potędze MS

Liczba dróg (niekoniecznie prostych) długości co najwyżej k pomiędzy wierzchołkami v_i i v_j wynosi m_{ij}, gdzie m_{ij} jest odpowiednim elementem poniższej macierzy:

$$B(G) + (B(G))^2 + \ldots + (B(G))^k = M = \begin{bmatrix} m_{11} & \ldots & m_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ m_{n1} & \ldots & m_{nn} \end{bmatrix}.$$

Wnioski z twierdzenia o potędze macierzy sąsiedztwa

Z poprzedniego wniosku i z faktu, że w grafie nieskierowanym spójnym o n wierzchołkach z każdego wierzchołka do każdego innego istnieje droga długości co najwyżej $n-1$ wynika, że:

Wniosek 2 z twierdzenia o potędze MS

Jeśli G jest grafem ogólnym i $|V(G)| = n > 2$ to G jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy macierz

$$B(G) + (B(G))^2 + \ldots + (B(G))^{n-1} = M = \begin{bmatrix} m_{11} & \ldots & m_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ m_{n1} & \ldots & m_{nn} \end{bmatrix}.$$

nie zawiera elementów równych 0.

Wnioski z twierdzenia o potędze macierzy sąsiedztwa

Wniosek 3 z twierdzenia o potędze MS

$$\mathrm{tr}((B(G))^2) = 2|E(G)|.$$

Wniosek 4 z twierdzenia o potędze MS

Niech G będzie grafem prostym, nieskierowanym. Liczba cykli długości 3 (tak zwanych *trójkątów*) w grafie G wynosi $\frac{1}{6}\,\mathrm{tr}((B(G))^3)$.

Macierz stopni

Macierz stopni

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem nieskierowanym, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Wtedy *macierz stopni* grafu G to:

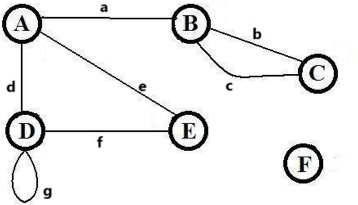
$$D(G) = \begin{bmatrix} d_{11} & \ldots & d_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{n1} & \ldots & d_{nn} \end{bmatrix},$$

gdzie

$$d_{ij} = \begin{cases} \deg v_i, & \text{jeśli } i = j; \\ 0, & \text{jeśli } i \neq j. \end{cases}$$

Macierz stopni jest macierzą kwadratową i diagonalną.

Przykład macierzy stopni



Po prawej macierz stopni powyższego grafu.

$$V = \{A, B, C, D, E, F\};$$

$$D(G) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Macierz Laplace'a (Kirchhoffa)

W zagadnieniach związanych z mechaniką klasyczną i kwantową, elektrotechniką oraz z uczeniem maszynowym (machine learning) zastosowania znajdują tak zwane macierze Laplace'a lub Kirchhoffa:

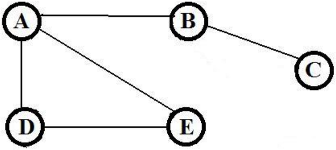
Macierz Laplace'a (Kirchhoffa)

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem **prostym** nieskierowanym, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Wtedy *macierzą Laplace'a* lub *macierzą Kirchhoffa* grafu G nazywamy macierz:

$$L(G) = D(G) - B(G)$$

gdzie $D(G)$ jest macierzą stopni, a $B(G)$ - macierzą sąsiedztwa grafu G.

Przykład macierzy Laplace'a



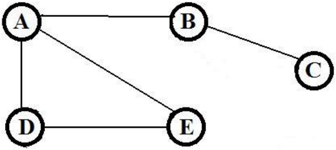
$$V = \{A, B, C, D, E\};$$

$$B(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Po prawej macierze sąsiedztwa i stopni powyższego grafu.

$$D(G) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Przykład macierzy Laplace'a



$$V = \{A, B, C, D, E\};$$

$$L(G) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Po prawej macierz Laplace'a powyższego grafu.

Własności macierzy Laplace'a

- Macierz Laplace'a jest symetryczna i dodatnio półokreślona.
- Suma elementów w każdym wierszu i w każdej kolumnie macierzy Laplace'a wynosi 0.
- $\det L(G) = 0$, $\operatorname{tr} L(G) = 2|E(G)|$.

Graf przejścia

W badaniu sieci (np. społecznych) za pomocą tak zwanych procesów Markowa (znanych z algebry liniowej) przydają się grafy przejścia i ich macierze przejścia.

Graf przejścia

Graf skierowany z wagami $G = (V, E)$ nazywamy *grafem przejścia*, jeśli zbiór wierzchołków $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ reprezentuje zbiór możliwych stanów, w jakich mogą się znajdować uczestnicy pewnego zmieniającego się układu, krawędź (v_i, v_j) istnieje, gdy możliwe jest przejście ze stanu v_i do stanu v_j, a waga $w(v_i, v_j)$ przypisana takiej krawędzi oznacza prawdopodobieństwo przejścia ze stanu i do stanu j (lub pozostania w tym samym stanie, jeśli $i = j$).

Macierze przejścia

Macierz przejścia

Macierzą przejścia $P(G)$ grafu przejścia G nazywamy macierz kwadratową:

$$P(G) = \begin{bmatrix} p_{11} & \dots & p_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix},$$

gdzie p_{ij} to prawdopodobieństwo przejścia ze stanu j do stanu i (lub pozostania w tym samym stanie, jeśli $i = j$).

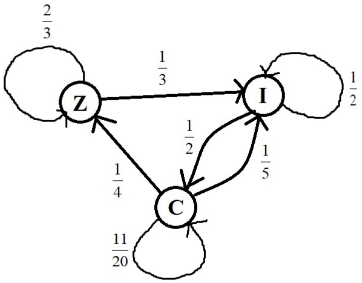
W większości zastosowań, $P(G)$ jest macierzą Markowa, czyli elementy każdej jej kolumny sumują się do 1.

Przykładowe zagadnienie grafów przejścia

Przykład

W pewnym eksperymencie próbkę komórek poddano działaniu pewnego wirusa i pewnego leku. Co godzinę zapisywano liczbę komórek zdrowych, liczbę komórek zainfekowanych wirusem, ale nie przejawiających objawów choroby i komórek chorych. Średnio, co godzinę $1/3$ komórek zdrowych stawała się zainfekowana, $1/2$ komórek zainfekowanych stawała się chorymi, a z komórek chorych $1/4$ zdrowiała, a $1/5$ wracała do stanu „uśpionej infekcji”. Reszta pozostawała w takim stanie, w jakim była wcześniej. Zapisać graf i macierz przejścia tego układu.

Przykład grafu i macierzy przejścia



Graf przejścia opisanego wcześniej układu (Z-zdrowe, I - zainfekowane, C - chore).

$$P(G) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{11}{20} \end{bmatrix}.$$

Macierz przejścia danego układu dla kolejności stanów (Z,I,C).

Interpretacja macierzy przejścia

Jeśli mamy dany wektor obecnego stanu układu (czyli wektor zapisujący, ilu uczestników układu jest w każdym stanie v_i), to mnożąc go przez macierz przejścia otrzymamy wektor kolejnego stanu układu.
Na przykład, dla rozważanego problemu, jeśli założymy, że w pewnym momencie było w układzie 60 komórek zdrowych, 40 komórek zainfekowanych i 100 komórek chorych, możemy obliczyć:

$$P(G) \cdot \begin{bmatrix} 60 \\ 40 \\ 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{11}{20} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 60 \\ 40 \\ 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 65 \\ 60 \\ 75 \end{bmatrix}$$

Zatem po godzinie możemy się spodziewać, że w układzie będzie 65 komórek zdrowych, 60 zainfekowanych i 75 chorych.

Zależność macierzy incydencji i sąsiedztwa

Zakończymy kilkoma ciekawymi wynikami algebraicznej teorii grafów.

Zależność macierzy incydencji i sąsiedztwa

Niech G będzie grafem nieskierowanym, prostym. Wtedy:

$$A(G) \cdot (A(G))^T = B(G) + D(G).$$

Macierz incydencji i drzewo

Macierz incydencji i drzewo

Niech G będzie grafem prostym, skierowanym, o n wierzchołkach, a macierz M wymiaru $(n-1) \times (n-1)$ będzie minorem (podmacierzą) macierzy incydencji $A(G)$, w której kolumny odpowiadają krawędziom z pewnego podzbioru $E(M)$ zbioru krawędzi grafu $E(G)$.
Przy tych założeniach, graf $H = (V(G), E(M))$ jest drzewem wtedy i tylko wtedy, gdy $\det M \neq 0$.

Wniosek

Jeśli G jest spójnym, prostym grafem skierowanym o n wierzchołkach, to rząd jego macierzy incydencji $A(G)$ wynosi $n-1$.