Rozwiazanie zadania IV z zestawu 1.

IV. Sprawdzić, że symbole nieoznaczone faktycznie są nieoznaczone, czyli podać przykłady funkcji $f_1$, $f_2$, $f_3$ i $g_1$, $g_2$, $g_3$ oraz $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ (w otoczeniu $x_0$ przykładowe funkcje nie powinny być stałe), takich, że:

a) $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f_2(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f_3(x) = \infty$ i $\lim\limits_{x\to x_0} g_1(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g_2(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g_3(x) = \infty$ oraz $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) - g_1(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x) - g_2(x) = 0$ i $\lim\limits_{x\to x_0} f_3(x) - g_3(x) = a \in (0,\infty)$.
Stąd możemy wnioskować, że $[\infty - \infty]$ jest symbolem nieoznaczonym.

b) $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f_2(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f_3(x) = \infty$ i $\lim\limits_{x\to x_0} g_1(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g_2(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g_3(x) = 0$ oraz $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)\cdot g_1(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)\cdot g_2(x) = 0$ i $\lim\limits_{x\to x_0} f_3(x)\cdot g_3(x) = a \in (0,\infty)$.
Stąd możemy wnioskować, że $[\infty \cdot 0]$ jest symbolem nieoznaczonym.

c) $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f_2(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f_3(x) = 0$ i $\lim\limits_{x\to x_0} g_1(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g_2(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g_3(x) = 0$ oraz $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = 0$ i $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f_3(x)}{g_3(x)} = a \in (0,\infty)$.
Stąd możemy wnioskować, że $[\frac{0}{0}]$ jest symbolem nieoznaczonym.

d) $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f_2(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f_3(x) = 1$ i $\lim\limits_{x\to x_0} g_1(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g_2(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g_3(x) = \infty$ oraz $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)^{g_1(x)} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)^{g_2(x)} = 0$ i $\lim\limits_{x\to x_0} f_3(x)^{g_3(x)} = a \in (0,\infty)$.
Stąd możemy wnioskować, że $[1^\infty]$ jest symbolem nieoznaczonym.

e) $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f_2(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f_3(x) = 0$ i $\lim\limits_{x\to x_0} g_1(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g_2(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g_3(x) = 0$ oraz $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)^{g_1(x)} = 1$, $\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)^{g_2(x)} = 0$ i $\lim\limits_{x\to x_0} f_3(x)^{g_3(x)} = a \in (0,1)$.
Stąd możemy wnioskować, że $[0^0]$ jest symbolem nieoznaczonym.

f) $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f_2(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f_3(x) = \infty$ i $\lim\limits_{x\to x_0} g_1(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g_2(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g_3(x) = 0$ oraz $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)^{g_1(x)} = 1$, $\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)^{g_2(x)} = \infty$ i $\lim\limits_{x\to x_0} f_3(x)^{g_3(x)} = a \in (1,\infty)$.
Stąd możemy wnioskować, że $[\infty^0]$ jest symbolem nieoznaczonym.

---

W każdym z przykładów rozwiązań jest wiele, ale starałem się wyznaczyć jak najprostsze, jednocześnie tak, by nie były funkcjami stałymi:

a) $[\infty - \infty]$

$x_0 = \infty$, $f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = x^2$, $g_1(x) = x$, $g_2(x) = \sqrt{x^4-1}$, $g_3(x) = \sqrt{x^4 - x^2}$

$$\lim_{x\to\infty} f_1(x) - g_1(x) = \lim_{x\to\infty} x^2 - x = [\infty - \infty] = +\infty,$$

ze względu na twierdzenie o granicy wielomianu.

$$\lim_{x\to\infty} f_2(x) - g_2(x) = \lim_{x\to\infty} x^2 - \sqrt{x^4-1} = [\infty-\infty] = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4 - x^4 + 1}{x^2 + \sqrt{x^4-1}} = [\frac{1}{\infty}] = 0.$$

$$\lim_{x\to\infty} f_3(x) - g_3(x) = \lim_{x\to\infty} x^2 - \sqrt{x^4 - x^2} = [\infty-\infty] = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4 - x^4 + x^2}{x^2 + \sqrt{x^4-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^4}})} = \frac{1}{2}.$$

b) $[\infty \cdot 0]$

$x_0 = \infty$, $f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = x^2$, $g_1(x) = \frac{1}{x}$, $g_2(x) = \frac{1}{x^3}$, $g_3(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

$$\lim_{x\to\infty} f_1(x)\cdot g_1(x) = \lim_{x\to\infty} x^2 \cdot \frac{1}{x} = [\infty\cdot 0] = \lim_{x\to\infty} x = +\infty,$$

$$\lim_{x\to\infty} f_2(x)\cdot g_2(x) = \lim_{x\to\infty} x^2 \cdot \frac{1}{x^3} = [\infty\cdot 0] = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

$$\lim_{x\to\infty} f_3(x)\cdot g_3(x) = \lim_{x\to\infty} x^2 \cdot \frac{1}{x^2+1} = [\infty\cdot 0] = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1,$$

z twierdzenia o granicy ilorazu wielomianów w nieskończoności.
c) $[\frac{0}{0}]$
$x_0 = 0$, $f_1(x) = f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = x^2 + 2x$, $g_1(x) = x^4$, $g_2(x) = x$, $g_3(x) = x^2 + x$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^4} = [\frac{0}{0}] = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = [\frac{0}{0}] = \lim_{x\to 0} x = 0,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f_3(x)}{g_3(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+2x}{x^2+x} = [\frac{0}{0}] = \lim_{x\to 0} \frac{x(x+2)}{x(x+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{x+2}{x+1} 2.$$

d) $[1^\infty]$
$x_0 = \infty$, $f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = 1 - \frac{1}{x}$, $g_1(x) = -x^2$, $g_2(x) = x^2$, $g_3(x) = -x$.

$$\lim_{x\to\infty} f_1(x)^{g_1(x)} = \lim_{x\to\infty} (1 - \frac{1}{x})^{(-x^2)} = [1^\infty] = \lim_{x\to\infty} \left[(1 - \frac{1}{x})^{(-x)}\right]^x = [e^{+\infty}] = +\infty,$$

$$\lim_{x\to\infty} f_2(x)^{g_2(x)} = \lim_{x\to\infty} (1 - \frac{1}{x})^{(x^2)} = [1^\infty] = \lim_{x\to\infty} \left[(1 - \frac{1}{x})^{(-x)}\right]^{-x} = [e^{-\infty}] = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} f_3(x)^{g_3(x)} = \lim_{x\to\infty} (1 - \frac{1}{x})^{(-x)} = [1^\infty] = e.$$

e) $[0^0]$
$x_0 = \infty$, $f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = 2^{-x^2}$, $g_1(x) = \frac{1}{x^3}$, $g_2(x) = \frac{1}{x}$, $g_3(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

$$\lim_{x\to\infty} f_1(x)^{g_1(x)} = \lim_{x\to\infty} \left(2^{-x^2}\right)^{\frac{1}{x^3}} = [0^0] = \lim_{x\to\infty} 2^{-\frac{1}{x}} = [2^0] = 1,$$

$$\lim_{x\to\infty} f_2(x)^{g_2(x)} = \lim_{x\to\infty} \left(2^{-x^2}\right)^{\frac{1}{x}} = [0^0] = \lim_{x\to\infty} 2^{-x} = [2^{-\infty}] = 0,$$

$$\lim_{x\to\infty} f_3(x)^{g_3(x)} = \lim_{x\to\infty} \left(2^{-x^2}\right)^{\frac{1}{x^2+1}} = [0^0] = \lim_{x\to\infty} 2^{-\frac{x^2}{x^2+1}} = [2^{-1}] = \frac{1}{2}.$$

f) $[\infty^0]$
$x_0 = \infty$, $f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = 2^{x^2}$, $g_1(x) = \frac{1}{x^3}$, $g_2(x) = \frac{1}{x}$, $g_3(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

$$\lim_{x\to\infty} f_1(x)^{g_1(x)} = \lim_{x\to\infty} \left(2^{x^2}\right)^{\frac{1}{x^3}} = [\infty^0] = \lim_{x\to\infty} 2^{\frac{1}{x}} = [2^0] = 1,$$

$$\lim_{x\to\infty} f_2(x)^{g_2(x)} = \lim_{x\to\infty} \left(2^{x^2}\right)^{\frac{1}{x}} = [\infty^0] = \lim_{x\to\infty} 2^{x} = [2^{\infty}] = +\infty,$$

$$\lim_{x\to\infty} f_3(x)^{g_3(x)} = \lim_{x\to\infty} \left(2^{x^2}\right)^{\frac{1}{x^2+1}} = [\infty^0] = \lim_{x\to\infty} 2^{\frac{x^2}{x^2+1}} = [2^1] = 2.$$