Szeregi i ciągłość funkcji

Zadania na ćwiczenia:
I. Na podstawie definicji, wiadomości o szeregach harmonicznych i twierdzenia o szeregu geometrycznym, zbadać, czy poniższe szeregi są zbieżne. Jeśli tak, obliczyć ich sumę:
Do dyskusji: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{2^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+\ln n}{n^2}$.
Do rozwiązania:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-3\cdot 2^n+2\cdot 3^n}{2^{2n-1}}$$

II. (do dyskusji) Czy zbieżne są szeregi: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2^n+3^n+4^n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$
III. (do dyskusji) Czy suma dwóch funkcji, które są ciągłe w punkcie a może nie być ciągła w punkcie a? Czy suma dwóch funkcji, które nie są ciągłe w punkcie a może być ciągła w punkcie a?
IV. Zbadać ciągłość funkcji f:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x^2+2x-3}{x^2-1}, & \text{dla } x\le 0 \\ \left(2^{\frac{1}{x}}+3^{\frac{1}{x}}\right)^x, & \text{dla } 0\le x\le 1 \\ (2x-1)^{\frac{1}{x^2-1}}, & \text{dla } x>1 \end{cases}.$$

V. Dla jakich wartości parametrów a, b i c funkcja f jest ciągła w x_0?

a) $$h(x)=\begin{cases} \frac{ax^2-2ax+a}{x^2-1}, & \text{dla } x>1 \\ b, & \text{dla } x=1;\ x_0=1. \\ \frac{cx-1}{x^2+1}, & \text{dla } x<1 \end{cases}$$

b) $$f(x)=\begin{cases} x+\left(\frac{1}{4^x}\right)^{\log_3(-1-x)}, & \text{dla } x<-1 \\ a, & \text{dla } x=-1,;\ x_0=-1. \\ \frac{x^2-(b-1)x-b}{2x^2+7x+5}, & \text{dla } x>-1. \end{cases}$$

VI. (do przemyślenia wspólnego) Korzystając z twierdzenia Weierstrassa udowodnić, że jeśli funkcja samopoczucia osoby konsumującej pączki w Tłusty Czwartek w zależności od ilości zjedzonych pączków jest ciągła i jeśli ta osoba generalnie lubi pączki, to istnieje optymalna ilość pączków, którą ta osoba powinna skonsumować, żeby czuć się jak najlepiej.
VII. Korzystając z twierdzenia Darboux wskazać przedział o długości 1 (najlepiej taki, którego końcami są liczby całkowite), taki, że dane równanie posiada co najmniej jedno rozwiązanie w tym przedziale:
a) $x^3+2x^2+3=x$, b) $3^x=2x^3+3x^2+x+25$.

Zadania domowe:
Zadanie 1. Na podstawie definicji i twierdzeń z wykładu, zbadać, czy poniższe szeregi są zbieżne. Jeśli tak, obliczyć ich sumę:
a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{4^{2n+1}}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{4}$, c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+4^{n+2}}{7^{n+1}}$, d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5-2^{n+4}}{3^{2n}}$,
e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}-3^{n+2}+4^n}{3\cdot 5^n}$, f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}-3^{2n-1}}{8^n}$, g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, h) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+3}{n+2}$.
Zadanie 2. Sprawdzić, czy poniższe szeregi spełniają warunek konieczny zbieżności szeregu liczbowego:
a) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{(\frac{1}{3})^n+(\frac{2}{5})^n}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n!}{n}$, c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+n+1}{1+n^3}$, d) $\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{tg} \frac{1}{n}$, e) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n-1}{n+3})^{n+2}$.
Zadanie 3. Zbadać ciągłość funkcji f:

a) $$f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-1}{x+1}, & \text{dla } x<-1 \\ x^2-3, & \text{dla } x\ge -1 \end{cases};$$

b) $$f(x)=\begin{cases} \frac{x-1}{x+2}, & \text{dla } x\ne -2 \\ 3, & \text{dla } x=-2 \end{cases};$$

c) $f(x) = \begin{cases} 3x-1, & \text{dla } x \le 0 \\ x^2-1, & \text{dla } x > 0 \end{cases}$;

d) $f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & \text{dla } x < 0 \\ (x-1)^2, & \text{dla } 0 \le x \le 2 \\ 4-x, & \text{dla } x > 2 \end{cases}$;

e) $f(x) = \begin{cases} 4-x^2, & \text{dla } 0 < |x| < 2 \\ 4, & \text{dla } |x| > 2 \\ 2, & \text{dla } x \in \{0,2\} \end{cases}$;

f) $f(x) = \begin{cases} 2^x+3, & \text{dla } x \le 0 \\ (x-2)^2, & \text{dla } x > 0 \end{cases}$.

Zadanie 4. Jaką wartość muszą przyjmować parametry a,b,c i jaką wartość mają odpowiednie symbole „?”, by funkcje f, g, h, k, l były ciągłe?

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{ax+2^{\frac{1}{x}}}{ax}, & \text{dla } x > 0 \\ ?, & \text{dla } x = 0 \\ \frac{(a+1)x^2+2x}{x(x+1)}, & \text{dla } x < 0 \end{cases}$.

b) $g(x) = \begin{cases} \log_2(x+4), & \text{dla } x > 0 \\ ?, & \text{dla } x = 0 \\ (1+bx)^{\frac{1}{x}}, & \text{dla } x < 0 \end{cases}$.

c) $h(x) = \begin{cases} \frac{2x^2+(a-4)x-2a}{x^2-9x+14}, & \text{dla } x < 2 \\ b, & \text{dla } x = 2, \\ x+(x+1)^{\log_2(x-2)}, & \text{dla } x > 2. \end{cases}$;

d) $k(x) = \begin{cases} ax^2-x, & \text{dla } x \le 2 \\ (x-1)^{\frac{1}{x-2}}, & \text{dla } x > 2 \end{cases}$.

e) $l(x) = \begin{cases} (\sqrt[x]{3}+\sqrt[x]{5})^x, & \text{dla } x > 0 \\ ae^x+1, & \text{dla } x \le 0 \end{cases}$.

Zadanie 5. Korzystając z twierdzenia Weierstrassa udowodnić, że wśród prostokątów wpisanych w trójkąt równoboczny o boku a istnieje taki, który ma największe pole z nich wszystkich.

Zadanie 6. Korzystając z twierdzenia Darboux wskazać przedział o długości 1 (najlepiej taki, którego końcami są liczby całkowite), taki, że dane równanie posiada co najmniej jedno rozwiązanie w tym przedziale:
a) $\sin\frac{\pi x}{2} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$; b) $x^2 - 5 = 0$;
c) $x^3 = 4x^2 + 9x + 15$; d) $x^3 + 6x^2 + 7x + 5 = 0$;
e) $x^3 - 2x^2 + x = 4$; f) $2x^3 + 60x + 18 = 21x^2$;
g) $e^x - 1 = \frac{3}{2(x+1)}$; h) $x^3 + 6x = 5x^2 + 20$; i) $x^5 + x^2 = x^4 + 2$.

Zadanie 7. Korzystając z twierdzenia Darboux udowodnić następujące twierdzenie o naleśniku z dżemem: Dany jest naleśnik (dla uproszeczenia: zakładamy, że jest całkowicie płaski i ma kształt koła bez dziur - ale bez tych założeń twierdzenie i tak by działało). Na naleśniku w dowolny sposób rozkładamy dżem. Teza: naleśnik z dżemem da się przekroić jednym cięciem noża (czyli linią prostą) tak, by po obu stronach cięcia było tyle samo naleśnika i tyle samo dżemu.

Dobrej zabawy!
Grzesiek Kosiorowski