Analiza - zestaw 3 (studia niestacjonarne)

Obliczanie pochodnych funkcji rzeczywistych i reguła de L'Hospitala

Zadania na ćwiczenia:

I. Obliczyć pochodne następujących funkcji:

a) $a(x) = x^5 + 2\sqrt[3]{x^4} - \frac{3}{x^2} + \frac{4}{\sqrt{x}} - x^e + \pi^x + e^\pi$; b) $b(x) = \operatorname{arctg} x \cdot \cos x \cdot \ln x$;

c) $c(x) = \frac{\sqrt{x}+3}{\log_2 x}$; d) $d(x) = 6^{x^5-5x^2+\frac{2}{x}}$; e) $e(x) = \ln(2x+1) \cdot \sin(3^x)$;

f) $g(x) = \sqrt[3]{\frac{2x^2+5}{x-3}}$; g) $h(x) = \ln\ln\ln\ln x$.

II. Obliczyć drugie pochodne następujących funkcji:

a) $k(x) = \sqrt{2x+5}$, b) $l(x) = xe^{-x}$.

III. Za pomocą reguły de L'Hospitala obliczyć granice (również jednostronne, jeśli jest taka konieczność):

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{\ln x}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2}$; c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3}$; d) $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{ctg} x$; e) $\lim\limits_{x\to 3} 2^{\frac{1}{x-3}} \cdot \cos(\frac{\pi x}{2})$; ę) $\lim\limits_{x\to\infty} (e^x - x^3)$;

f) $\lim\limits_{x\to 4}(x-4)^{x^2-5x+4}$; g) $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x)^{e^x}$.

Zadania domowe:

Zadanie 1. Obliczyć pochodne następujących funkcji:

a) $f(x) = x^7 - 4x^5 + 13x^4 - x + 19$, ą) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{5}{6}\sqrt[5]{x^3} - 2\sqrt{x^3}$,

b) $f(x) = \frac{5}{\sqrt[7]{x}} - 2x^7 + \frac{3}{2\sqrt{x}}$, c) $f(x) = 3^x x^3$, ć)$f(x) = (10x^2-1)e^{3x+1}$ d) $f(x) = \frac{3}{3x-2}$,

e) $f(x) = (x^2+1)\operatorname{tg} x$ ę) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$, f) $f(x) = \cos 2x$, g) $f(x) = \left(\frac{1}{x} + 4\right)^6$,

h) $f(x) = \sqrt{x^2-4}$, i) $f(x) = \sin^2 3x$, j) $f(x) = 5e^{\cos x}$,

k) $f(x) = \ln(5x^2 - x + 1)$, l) $f(x) = 7 \cdot 5^{10x}$, ł) $f(x) = 3\log_3 \frac{5}{x-2}$,

m) $f(x) = \ln\ln x$, n) $f(x) = \ln\sin x$, ń*) $f(x) = x^x$, o) $f(x) = \log_2(\cos\frac{1}{2}x)^2$,

ó) $f(x) = \frac{\cos(2x-1)}{e^x}$, q) $f(x) = \sin(\ln x)$, p) $f(x) = 11^{\operatorname{ctg} x}$, r) $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{\frac{3x+2}{4x+3}}$

s) $f(x) = \sqrt{3}\ln(\sin x + \cos^2(3x+1))$, t) $f(x) = \sin(\frac{2\sqrt{x}}{x^2-1})$, u) $f(x) = \log_3(\frac{\sin(1-x)}{e^{-x}})$,

v) $f(x) = \log_5(\operatorname{tg}^2 x)$, w) $f(x) = \ln(\frac{x^2-1}{x+2})$, y) $f(x) = (\frac{e^x}{\cos x})^3$, z) $f(x) = \frac{3^{\sqrt{\sin x}}}{x^2}$.

Zadanie 2. Obliczyć drugie pochodne następujących funkcji:

a) $f(x) = x^5 - x^4 + x - 1$, b) $f(x) = x + \frac{1}{x}$, c) $f(x) = \ln 2x$, ć) $f(x) = \cos x$,

d) $f(x) = \operatorname{tg} x$, e) $f(x) = \log_2(x^2+3)$, ę) $f(x) = e^{3x} + e^{-2x}$, f) $f(x) = 2^{\sqrt{x}}$,

g) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

Zadanie 3. Za pomocą reguły de L'Hospitala obliczyć granice (również jednostronne, jeśli jest taka konieczność):

a) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{2x^2-5x+2}{5x^2-7x-6}$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x+1-e^x}{x^2}$; c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$; d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2-e^x-e^{-x}}{1-\cos^2 x}$;

e) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-25}$; f) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\cos x}$; g) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\ln(x-1)}{x-2}$; h) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x}+5x-4}{x\ln x}$;

i) $\lim\limits_{x\to 0}[\ln(e+x^3)]^{\frac{1}{x^3}}$; j) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{4x}$; k) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x\operatorname{ctg} x}$; n) $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$; l) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{1+\sin x}$.

m) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$; n) $\lim\limits_{x\to\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$; o) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$; p) $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{tg} x \ln x$;

q) $\lim\limits_{x\to 0^+} (e^x - 1)^x$; r) $\lim\limits_{x\to 0^+} (e^x + 3x)^{\frac{1}{x}}$; s) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$; t) $\lim\limits_{x\to 1^-} (1-x)^{\ln x}$;

u) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$; v) $\lim\limits_{x\to\infty} (x - \ln x)$; w) $\lim\limits_{x\to 5}(x-5)e^{\frac{1}{x-5}}$; x) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.

Dobrej zabawy!

Grzesiek Kosiorowski