Przykładowe zadania na sprawdzian zaliczeniowy z analizy matematycznej

12 XII 2025

Informacje dla zdających:

1. Sprawdzian trwa 60 minut. Można pracę oddać wcześniej i wyjść, ale nie w ciągu ostatnich 10 minut.

2. Podczas sprawdzianu wolno korzystać jedynie z kalkulatora, narzędzi do pisania i materiałów otrzymanych od prowadzących egzamin. Wszelkie przedmioty poza wspomnianymi powinny być pozostawione w torbach/plecakach we wskazanym przez egzaminujących miejscu. W szczególności nie wolno używać żadnych narzędzi umożliwiających kontakt ze światem zewnętrznym (np. telefonów komórkowych, smartwatchy itp.) i własnych kartek.

3. Wszystkie kartki z rozwiązaniami należy podpisać imieniem i nazwiskiem oraz grupą przydzieloną na sprawdzianie.

4. Na prawdziwym sprawdzianie nie będzie aż tyle zadań (i oczywiście badane funkcje będą inne). Z zadań typu 1 a, b, c i d wybiorę zapewne dwa lub trzy, z zadania 2a,b,c około 3-5 przykładów. Konkretne wartości punktowe zadań mogą się nieco różnić (acz będą zbliżone). W sumie do zdobycia jest 400 punktów (wynik będzie podzielony przez 10 na potrzeby całkowitego wyniku kursu).

Grupa X

Zadania:

1a. (40 punktów) Rozwiązać nierówność:

$$\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{16-x^2} > -1.$$

1b. (40 punktów) Dane są funkcje $f(x) = \log_5 x$, $g(x) = \sqrt{4x+5}$, $h(x) = 5-x$. Podać dziedzinę i wzór funkcji $f \circ h \circ g$.

1c. (30 punktów) Podać wzór funkcji odwrotnej do $f(x) = 3^{\sqrt[3]{5\ln x+2}}$ (nie obliczać dziedziny!).

1d. (20 punktów) Korzystając z twierdzenia Darboux wskazać przedział o długości 1 (najlepiej taki, którego końcami są liczby całkowite), taki, że równanie $3^x = 2x^3 + 3x^2 + x + 25$ posiada co najmniej jedno rozwiązanie w tym przedziale.

2a. (80 punktów) Wyznaczyć dziedzinę funkcji $f(x) = \frac{x^3-8x^2+16x}{4+3x-x^2}$ i obliczyć granice f na końcach jej przedziałów określoności.

2b. (50 punktów za każdy podpunkt) Obliczyć granice funkcji (również jednostronne, jeśli funkcja nie ma granicy) i ciągów:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{3n^2+2n-5} - n\sqrt{3}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{tg}(\frac{3x^2+1}{2x^2+x+1})^{-x^2}$; c) $\lim\limits_{x\to-\infty} (\frac{x^2+2}{x^2-3})^{2x^2}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0} \log_2(\frac{1}{\sqrt{x}})$; e) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{10^{x-2}+9^{x-1}+8^x}$; f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3\cdot 2^{2n+2}-10}{5\cdot 4^{n-1}+13\cdot 3^n}$.

2c. (50 punktów) Na podstawie definicji i twierdzeń z wykładu, zbadać, czy poniższe szeregi są zbieżne. Jeśli tak, obliczyć ich sumę:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}-3^{2n-1}}{8^n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-3\cdot 2^n+2\cdot 3^n}{2^{2n-1}}$.

3. (100 punktów) Dla jakiego parametru a i funkcja h jest ciągła w $x_0 = 1$? Odpowiedź uzasadnić.

$$f(x) = \begin{cases} x + \left(\frac{1}{4^x}\right)^{\log_3(-1-x)}, & \text{dla } x < -1 \\ a, & \text{dla } x = -1, ; x_0 = -1. \\ \frac{x^2-(b-1)x-b}{2x^2+7x+5}, & \text{dla } x > -1. \end{cases}$$

Wzory:

$$\sin 0 = 0;\ \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2};\ \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2};\ \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2};\ \sin\frac{\pi}{2} = 1.$$