Egzamin z elementów matematyki dyskretnej, stacjonarne, termin 1, 18 VI 2025

Informacje dla zdających:

1. Egzamin trwa 75 minut. Nikt nie wychodzi w ciągu ostatnich 10 minut.
2. Podczas egzaminu wolno korzystać jedynie z kalkulatora, narzędzi do pisania i materiałów otrzymanych od prowadzących egzamin. Wszelkie przedmioty poza wspomnianymi powinny być pozostawione w torbach/plecakach we wskazanym przez egzaminujących miejscu. W szczególności nie wolno używać telefonów komórkowych, smartwatchy i własnych kartek, zapisanych lub nie.
3. Wszystkie kartki z rozwiązaniami należy podpisać imieniem i nazwiskiem.
4. Definicje i twierdzenia w zadaniu 5 nie muszą być zapisywane formalnie, mogą być podane własnymi słowami.

Zadania:

1. (300 punktów) Firma PIMKO zatrudnia 17 pracowników, w tym 7 grafików i 6 programistów. Firma zaangażowała się w nowy projekt opatrzony kryptonimem "FERDYDURKE". Do projektu potrzeba wybrać 11 pracowników.

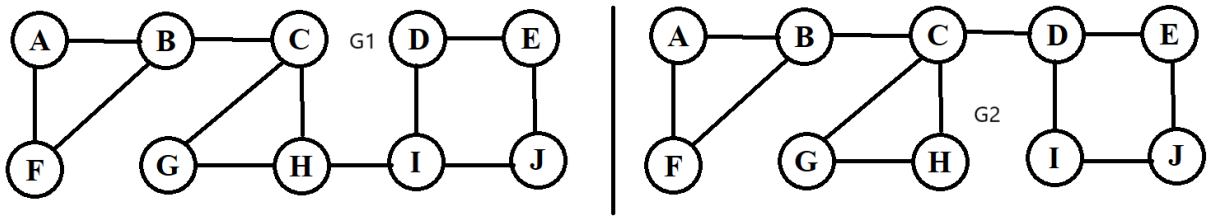
   a) Na ile sposobów można wybrać skład grupy projektowej, jeśli w projekcie potrzebni są dokładnie czterej graficy i co najmniej 4 programistów?

   b) Premia z tytułu projektu ma być rozdzielona wśród 11 pracowników z grupy projektowej w sposób losowy, przy czym wszystkie stawki wynagrodzenia mają być wielokrotnościami kwoty 1000 PLN, a każdy z zaangażowanych ma dostać co najmniej 2000 PLN. Na ile sposobów można porozdzielać 40000 PLN, które firma dostanie za ten projekt?

   c) W czasie trwania projektu pracownicy zostają zobowiązani do tytułowania korespondencji mailowej anagramami słowa FERDYDURKE, przy czym w ciągu dnia żaden z tytułów nie może się powtórzyć. Ile wiadomości mogą maksymalnie dziennie wysłać członkowie grupy projektowej? (anagram - słowo powstałe z przestawienia liter danego słowa)

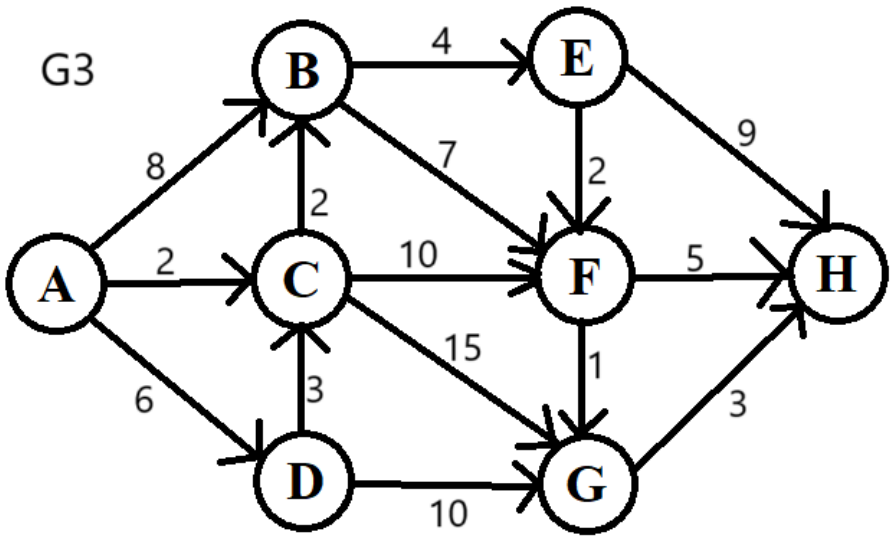
2. (200 punktów) Dla każdego z grafów G_1, G_2 sprawdzić, czy występuje w nim cykl lub droga Eulera. Odpowiedź uzasadnić powołując się na odpowiednie twierdzenie. Jeśli dla któregoś z grafów będzie istnieć droga Eulera, ale nie cykl Eulera, wykorzystać algorytm Fleury'ego do znalezienia jednej z tych dróg zapisując przebieg algorytmu w tabeli o nagłówkach jak poniżej. Zapisać odpowiedź w postaci ciągu kolejnych odwiedzanych wierzchołków na tej drodze.

Nr etapu	wybór	inne możliwości	obecny wierzchołek
1			

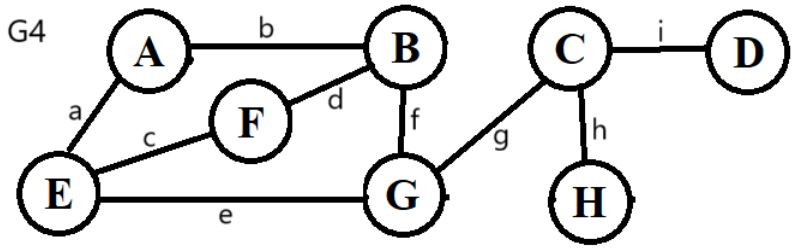


3. (200 punktów) Zastosować algorytm Dijkstry ze wskaźnikami do wyznaczenia drogi o najmniejszej wadze pomiędzy wierzchołkami A i H grafu $G3$. Przebieg algorytmu zapisać w tabeli o nagłówkach jak poniżej. Zapisać tę drogę i jej wagę.

Nr etapu	Zbiór L	d(B)p(B)	d(C)p(C)	...



4. (200 punktów) Dla poniższego grafu G4:



I. Zapisać macierz incydencji (wiersze i kolumny macierzy w kolejności alfabetycznej).

II. Wypisać wszystkie wierzchołki rozspajające.

III. Wypisać wszystkie wierzchołki stopnia 2.

IV. Czy graf G4 jest dwudzielny? Uzasadnić odpowiedź, wskazując odpowiedni podział zbioru wierzchołków lub cykl.

V. Czy graf G4 jest hamiltonowski? Uzasadnić odpowiedź, wskazując odpowiedni cykl lub krótko uzasadnić niemożliwość jego istnienia.

VI. Podać indeks chromatyczny grafu G4.

5. (100 punktów) Wyjaśnić pojęcie: drzewo spinające. Podać przykład praktycznej sytuacji, w której należy wyznaczyć drzewo spinające. Jakie algorytmy wyznaczają minimalne drzewa spinające?