

6c. Rozwiązywanie rekurencji liniowych

Grzegorz Kosiorowski

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

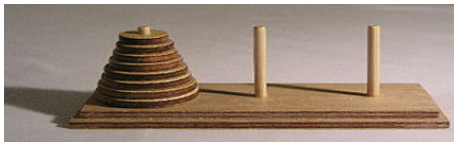
Rozwiązywanie liniowych zależności rekurencyjnych

W wypadkach takich jak ciąg Fibonacciego, czy silnia dosyć łatwo było uzyskać wzór rekurencyjny ciągu, ale nie wzór ogólny pozwalający szybko uzyskać konkretny jego wyraz. Wzór rekurencyjny bywa pożyteczny, ale ma kilka wad:

- Trzeba uważać, czy jego definicja jest poprawna;
- Często nie wiemy z góry, co wzór rekurencyjny właściwie definiuje;
- Zazwyczaj obliczanie dalekich wyrazów ciągu z jego postaci rekurencyjnej trwa dłużej niż gdy wzór jest podany w *postaci zwartej*, czyli niezależnej od odwoływania się do poprzednich wyrazów tego ciągu.

Dlatego będziemy chcieli rozwiązywać takie zależności rekurencyjne, przez co rozumiemy znajdowanie zwartego wzoru na n -ty wyraz danego rekurencyjnie ciągu (co nie zawsze jest możliwe, np. silnia).

Przykład - wieże z Hanoi



Zagadka wież z Hanoi

Legenda mówi, że w bramińskiej świątyni w Hanoi mnisi przekładają 64 złote krążki o różnej średnicy pomiędzy trzema diamentowymi słupkami. Na początku wszystkie krążki były nanizane na jeden słupek, tak, że najmniejszy krążek leżał na górze, a pod nim pozostałe, w kolejności rosnącej średnicy (największy na samym dole). Krążki przekładane są pojedynczo. Krążka nigdy nie można było przełożyć na inny słupek w ten sposób, by leżał na mniejszym krążku. Ile co najmniej przełożeń potrzeba, by wszystkie krążki przenieść z pierwszego słupka na ostatni? (zdjęcie z Wikipedii)

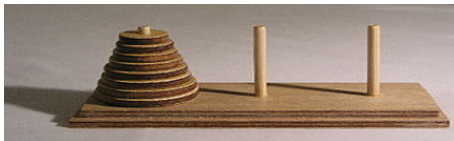
Przykład - wieże z Hanoi



Żeby rozwiązać tę zagadkę, najpierw ją uogólnimy: założmy, że do dyspozycji mamy n krążków. Przez T_n oznaczmy odpowiedź na pytanie: Ile co najmniej przełożeń potrzeba, by n krążków przenieść z pierwszego słupek na ostatni?

Najpierw zaobserwujmy pojedyncze przypadki: $T_0 = 0$ (nie potrzebujemy się ruszać, by przenieść zero krążków), $T_1 = 1$ (jeden krążek w jednym ruchu), $T_2 = 3$ (najpierw mniejszy krążek na drugi słupek, większy na trzeci, mniejszy na większy).

Wieże z Hanoi - definicja rekurencyjna



Dość łatwo wyznaczyć wzór rekurencyjny na T_n , zakładając, że znamy T_{n-1} :

Żeby przełożyć na słupek trzeci największy z krążków, najpierw musimy pozostałe $n - 1$ krążków przełożyć na słupek drugi (wykorzystując słupek 3). W ilu przełożeniach można tego dokonać? Oczywiście, w T_{n-1} ! Następnie musimy przełożyć największy krążek z pierwszego słupek na trzeci (1 przełożenie), a potem wszystkie $n - 1$ krążków przełożyć ze słupek drugiego na trzeci (wykorzystując słupek 1) - co znowu zajmie T_{n-1} ruchów.

Podsumowując, mamy $T_n = T_{n-1} + 1 + T_{n-1} = 2T_{n-1} + 1$ i $T_0 = 0$ - czyli pełną definicję rekurencyjną T_n .

Wieże z Hanoi - wzór zwarty

$T_n = 2T_{n-1} + 1$ i $T_0 = 0$ - ta definicja niezbyt ułatwia nam rozwiązanie oryginalnej zagadki. Obliczenie T_{64} może trwać dość długo. Dlatego potrzebujemy wzoru zwartego.

Posłużymy się sztuczką: przyjrzymy się ciągowi $U_n := T_n + 1$. Ten ciąg spełnia zależność $U_0 = 1$ i $U_n - 1 = 2(U_{n-1} - 1) + 1$, czyli $U_n = 2U_{n-1}$. Wzór zwarty ciągu U_n wyznaczyć teraz łatwo: $U_n = 2^n$ (jeśli nie jest to oczywiste, można to udowodnić na podstawie indukcji matematycznej). Stąd otrzymujemy wzór $T_n = U_n - 1 = 2^n - 1$.
Zatem, odpowiedzią na zagadkę jest $2^{64} - 1$, czyli ponad 18 trylionów przełożeń. Przy założeniu, że mnisi przekładają jeden krążek na sekundę, ułożenie tej łamigłówki zajmie im około 580 miliardów lat.

Ogólne podejście - motywacja

Poradziliśmy sobie ze zmianą postaci rekurencyjnej na zwartą w zagadnieniu wież Hanoi. Jednakże, metoda tam przedstawiona nie jest uniwersalna - działa dla tego konkretnego ciągu, ale niekoniecznie dla jakiegokolwiek innego.

Jest wiele ogólnych metod, często dość wyrafinowanych, przechodzenia z postaci rekurencyjnej do zwartej. Jako przykład, przedstawimy jedną, która działa dla ciągów $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ określonych wzorami rekurencyjnymi typu $s_n = as_{n-1} + bs_{n-2} + f(n)$ (jak np. ciąg Fibonacciego), przy założeniu, że znamy s_1 i s_0 .

Oczywiście, metoda ta działa też dla wzorów typu: $s_n = as_{n-1} + f(n)$ (wystarczy podstawić $b = 0$).

Rozwiązania rekurencji i równania rekurencyjnego

Rozwiązaniem rekurencji zadanej $s_n = as_{n-1} + bs_{n-2} + f(n)$; $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$ jest ciąg $(t_n)_{n=1}^{\infty}$, którego wzór jest zapisany w sposób zwarty i taki, że $t_0 = s_0$, $t_1 = s_1$ oraz dla każdego $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ zachodzi $t_n = at_{n-1} + bt_{n-2} + f(n)$.

Szczególnym rozwiązaniem równania rekurencyjnego $s_n = as_{n-1} + bs_{n-2} + f(n)$ jest dowolny ciąg $(t_n)_{n=1}^{\infty}$, którego wzór jest zapisany w sposób zwarty i taki, że dla każdego $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ zachodzi $t_n = at_{n-1} + bt_{n-2} + f(n)$. Dla rozwiązania szczególnego nie musi się zgadzać warunek początkowy rekurencji.

Ogólnym rozwiązaniem równania rekurencyjnego jest zbiór jego wszystkich rozwiązań szczególnych (najczęściej w postaci równania zawierającego parametr lub parametry, które trzeba zastąpić liczbami, by otrzymać rozwiązanie całej rekurencji).

Rozwiązania - terminologia

Szczególnym rozwiązaniem równania rekurencyjnego dla zagadnienia wież Hanoi $T_n = T_{n-1} + 1 + T_{n-1} = 2T_{n-1} + 1$ byłoby na przykład $T_n^* = 2^{n+2} - 1$. Nie jest to faktyczne rozwiązanie rekurencji z dodatkowym warunkiem $T_0 = 0$, bo $T_0^* = 3$. Ogólne rozwiązanie równania rekurencyjnego $T_n = T_{n-1} + 1 + T_{n-1} = 2T_{n-1} + 1$ ma wzór $\tilde{T}_n = C \cdot 2^n - 1$. Dla każdego C , \tilde{T}_n spełnia równanie rekurencyjne. Gdy wiemy, że $\tilde{T}_0 = 0$, można wyliczyć, że $C = 1$. Zatem rozwiązaniem całego zagadnienia rekurencyjnego było $T_n = 2^n - 1$. Procedura rozwiązywania rekurencji, którą będziemy stosować, wymaga najpierw znalezienia rozwiązania ogólnego równania rekurencyjnego, a następnie użycia warunków początkowych w celu wyznaczenia wartości, które powinny przyjąć parametry ogólnego rozwiązania, by zostać „prawdziwym” rozwiązaniem. Dlatego warto pamiętać, że warunków początkowych nie używamy, dopóki nie otrzymamy ogólnego rozwiązania równania rekurencji.

Rekurencje liniowe jednorodne

Dla ogólnej rekurencji $s_n = as_{n-1} + bs_{n-2} + f(n)$ z danymi $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$ rekurencją liniową *jednorodną* nazywamy rekurencję z równaniem:

$$s_n = as_{n-1} + bs_{n-2}$$

(gdzie $a, b \in \mathbb{R}$). Przez *jednorodność* w tej sytuacji rozumiemy, że prawa strona warunku rekurencyjnego zawiera tylko wyrazy zależne od poprzednich elementów ciągu, nie od numeru obliczanego wyrazu ($f(n)$), natomiast reszta równania rekurencyjnego jest taka sama jak równanie wyjściowe.

Generalnie, rozwiązywanie ogólnej (niejednorodnej) rekurencji wymaga rozwiązania w pierw odpowiadającej jej rekurencji jednorodnej.

Równanie charakterystyczne

Równanie charakterystyczne

Dla zależności rekurencyjnej jednorodnej $s_n = as_{n-1} + bs_{n-2}$ *równaniem charakterystycznym* nazywamy:

$$x^2 - ax - b = 0.$$

Jeśli ktoś nie umie rozwiązywać takich równań, proszę sobie przypomnieć, jak to się robiło...

Twierdzenie o RLJ

Twierdzenie o RLJ (rekurencji liniowej jednorodnej)

Dla danych $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$ i definicji rekurencyjnej jednorodnej $s_n = as_{n-1} + bs_{n-2}$ ($a, b \in \mathbb{R}$), jeśli równanie charakterystyczne $x^2 - ax - b = 0$ ma dwa różne pierwiastki r_1 i r_2 , to ogólnym rozwiązaniem rekurencji jednorodnej jest:

$$s_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n,$$

dla pewnych stałych c_1 i c_2 .

Jeśli równanie charakterystyczne ma jeden pierwiastek podwójny r to ogólnym rozwiązaniem rekurencji jednorodnej jest:

$$s_n = c_1 r^n + c_2 n r^n,$$

dla pewnych stałych c_1 i c_2 .

Twierdzenie o RLJ - uwagi

- Występujące w twierdzeniu *rozwiązania ogólne* równania rekurencyjnego nie uwzględniają one danych s_0 i s_1 .
- Stałe c_1 i c_2 obliczamy podstawiając do otrzymanego wzoru s_0 i s_1 (jeśli są dane), otrzymując faktyczne rozwiązanie rekurencji.
- Podstawienie innych wartości w miejsce c_1 i c_2 powodowałoby powstanie innych *rozwiązań szczególnych* równania rekurencyjnego.
- W twierdzeniu o RLJ nie rozpatrujemy przypadku, gdy równanie charakterystyczne nie ma rozwiązań: wrócimy do tego po przykładach.

Twierdzenie o RLJ - uwagi

- Jeśli $b = 0$, czyli $s_n = as_{n-1}$ to równanie charakterystyczne ma postać $x^2 - ax = 0$, jego pierwiastki to a i 0 , więc łatwo otrzymamy, że rozwiązaniem takiego równania będzie $s_n = a^n s_0$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.
- Jeśli $a = 0$ (czyli $s_n = bs_{n-2}$) to równanie charakterystyczne ma postać $x^2 - b = 0$, jego pierwiastki to \sqrt{b} i $-\sqrt{b}$. Nietrudno udowodnić, że $s_{2n} = b^n s_0$ i $s_{2n+1} = b^n s_1$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

Rekurencje liniowe jednorodne - przykład

Zadanie

Rozwiązać rekurencję $s_0 = 1$, $s_1 = -3$, $s_n = 6s_{n-1} - 9s_{n-2}$.

Najpierw wypisujemy równanie charakterystyczne tej rekurencji jednorodnej:

$$x^2 - 6x + 9 = 0.$$

Rozwiązując je, dostajemy jeden pierwiastek podwójny $r = 3$. Zatem, zgodnie z twierdzeniem o RLJ, rozwiązanie ogólne jest postaci:

$$s_n = c_1 3^n + c_2 n 3^n.$$

Musimy teraz obliczyć c_1 i c_2 .

Rekurencje liniowe jednorodne - przykład

Zadanie

Rozwiązać rekurencję $s_0 = 1$, $s_1 = -3$, $s_n = 6s_{n-1} - 9s_{n-2}$.

$$s_n = c_1 3^n + c_2 n 3^n.$$

Podstawiamy za n najpierw 0, a potem 1 i korzystając z warunków zadania oraz rozwiązania ogólnego dostajemy:

$$\begin{cases} 1 = s_0 = c_1 3^0 + c_2 \cdot 0 \cdot 3^0 = c_1 \\ -3 = s_1 = c_1 3^1 + c_2 \cdot 1 \cdot 3^1 = 3c_1 + 3c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = -2 \end{cases}.$$

Zatem rozwiązanie rekurencji to: $s_n = 3^n - 2n3^n$.

Przykład - ciąg Fibonacciego

Zadanie

Rozwiązać rekurencję $F_0 = 1$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

Najpierw wypisujemy równanie charakterystyczne tej rekurencji:

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Rozwiązując je, dostajemy dwa pierwiastki $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
Zatem, zgodnie z twierdzeniem, rozwiązanie ogólne jest postaci:

$$F_n = c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Musimy teraz obliczyć c_1 i c_2 .

Przykład - ciąg Fibonacciego

Zadanie

Rozwiązać rekurencję $F_0 = 1$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

$$F_n = c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Podstawiamy za n najpierw 0, a potem 1 i korzystając z warunków zadania oraz rozwiązania ogólnego dostajemy:

$$\begin{cases} 1 = F_0 = c_1 + c_2 \\ 1 = F_1 = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \\ c_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \end{cases}.$$

Zatem wzór na n -ty wyraz ciągu Fibonacciego to:

$$F_n = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Rekurencje liniowe jednorodne - uwagi

- Twierdzenie o RLJ działa nawet jeśli pierwiastki równania nie są rzeczywiste! Co prawda we wzorach będą się pojawiać liczby zespolone (r_1 i r_2), ale dla każdego konkretnego wyrazu części urojone się skrócą i otrzymamy wynik rzeczywisty (tak jak $\sqrt{5}$ się skraca przy obliczaniu konkretnego elementu w rozwiązaniu rekurencji Fibonacciego). Zatem przypadek „nie ma pierwiastków” nie zachodzi.
- Analogiczną metodę można stosować, gdy s_n zależy (w sposób liniowy) od więcej niż 2 poprzednich wyrazów. Jednak wtedy wielomian charakterystyczny będzie stopnia większego niż 2 i znalezienie jego pierwiastków może być problematyczne.

Rekurencje liniowe niejednorodne

Niejednorodną liniową rekurencją (formalnie: drugiego stopnia) będziemy nazywać zagadnienie postaci:

$$s_n = as_{n-1} + bs_{n-2} + f(n),$$

z warunkami początkowymi $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$.

Funkcję $f(n)$ nazywamy *wyrazem wolnym rekurencji*.

Rekurencje liniowe niejednorodne - rozwiązanie

O rozwiązaniu RLN (rekurencji liniowej niejednorodnej)

Rozwiązaniem ogólnym równania rekurencyjnego

$$s_n = as_{n-1} + bs_{n-2} + f(n) \text{ jest}$$

$$s_n = \tilde{s}_n + s_n^*,$$

gdzie \tilde{s}_n jest ogólnym rozwiązaniem równania rekurencji jednorodnej $s_n = as_{n-1} + bs_{n-2}$ (uzyskanym z twierdzenia o RLJ), a s_n^* jest dowolnym szczególnym rozwiązaniem równania rekurencji niejednorodnej $s_n = as_{n-1} + bs_{n-2} + f(n)$ (dla dowolnie wybranych warunków początkowych).

Niestety, nie ma ogólnej metody pozwalającej na wskazanie s_n^* - to rozwiązanie trzeba zgadnąć. Jednak w kilku typowych sytuacjach, nasze „zgadywanie” da się zalgorytmizować (tzw. metodą przewidywań).

Metoda przewidywań

Twierdzenie o przewidywaniu rozwiązania szczególnego rekurencji niejednorodnej

Przy wcześniejszych oznaczeniach zakładamy, że wyraz wolny jest funkcją $f(n) = P(n)q^n$, gdzie $P(n)$ jest wielomianem.

Wtedy rozwiązanie szczególne równania rekurencyjnego jest postaci

$$s_n^* = Q(n) \cdot q^n \cdot n^k,$$

gdzie $Q(n)$ jest wielomianem stopnia takiego jak $P(n)$, a k - krotnością pierwiastka q w równaniu charakterystycznym rekurencji jednorodnej $s_n = as_{n-1} + bs_{n-2}$.

Współczynniki wielomianu Q obliczamy wstawiając s_n^* do równania rekurencyjnego. Przypominam, że stała też jest wielomianem (stopnia zero)!

Zadanie

$$s_0 = -3, s_1 = 36, s_n = -6s_{n-1} - 9s_{n-2} + 3^n.$$

Równanie charakterystyczne dla części jednorodnej

$s_n = -6s_{n-1} - 9s_{n-2}$ ma postać: $x^2 + 6x + 9 = 0$ i jeden pierwiastek podwójny $r = -3$. Otrzymujemy rozwiązanie ogólne RLJ:

$$\tilde{s}_n = c_1(-3)^n + c_2n(-3)^n.$$

$f(n) = 3^n$. Zatem $P(n) = 1$ jest wielomianem stopnia 0 i $q = 3$ nie jest pierwiastkiem równania $x^2 + 6x + 9 = 0$, przewidujemy więc rozwiązanie szczególne $s_n^* = A3^n$ ($k = 0$, $Q(n) = A$ - stopnia 0).

Rekurencje niejednorodne - przykład

Zadanie

$$s_0 = -3, s_1 = 36, s_n = -6s_{n-1} - 9s_{n-2} + 3^n.$$

...przewidujemy więc rozwiązanie szczególne $s_n^* = A3^n$.

W celu wyznaczenia A wstawiamy rozwiązanie s_n^* bezpośrednio do naszego równania rekurencyjnego, uwzględniając, że $s_{n-1}^* = A3^{n-1}$ i $s_{n-2}^* = A3^{n-2}$. Otrzymujemy:

$$A3^n = -6A3^{n-1} - 9A3^{n-2} + 3^n.$$

Elementarne przekształcenia prowadzą do równania $4A3^n = 3^n$, więc $A = \frac{1}{4}$. Zatem ostatecznie $s_n^* = \frac{1}{4}3^n$.

Rekurencje niejednorodne - przykład

Zadanie

$$s_0 = -3, s_1 = 36, s_n = -6s_{n-1} - 9s_{n-2} + 3^n.$$

Skoro tak, na mocy twierdzenia o RLN rozwiązanie ogólne całej rekurencji ma wzór:

$$s_n = c_1(-3)^n + c_2n(-3)^n + \frac{1}{4}3^n.$$

Podstawiając $n = 0$ i $n = 1$ dostajemy:

$$\begin{cases} -3 = s_0 = c_1 + \frac{1}{4} \\ 36 = s_1 = -3c_1 - 3c_2 + \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -\frac{13}{4} \\ c_2 = -\frac{17}{2} \end{cases}.$$

Zatem ostateczne rozwiązanie rekurencji to:

$$s_n = -\frac{13}{4}(-3)^n - \frac{17}{2}n(-3)^n + \frac{1}{4}3^n.$$

Rekurencje niejednorodne - przykład 2

Spróbujmy teraz „bez sztuczek”, a przy pomocy systematycznego podejścia rozwiązać rekurencję wież z Hanoi.

Zadanie

$$s_1 = 1, s_n = 2s_{n-1} + 1.$$

Równanie charakterystyczne rekurencji jednorodnej $s_n = 2s_{n-1}$ to $x^2 - 2x = 0$, a jego pierwiastki to 0 i 2, więc rozwiązaniem RLJ jest:

$$\tilde{s}_n = c_1 2^n.$$

$f(n) = 1$, więc $q = 1$, $k = 0$ i $P(n) = 1$ jest wielomianem stopnia zero. Zatem możemy przewidzieć, że s_n^* będzie wielomianem stopnia zero, czyli stałą. Niech $s_n^* = C$.

Zadanie

$$s_1 = 1, s_n = 2s_{n-1} + 1.$$

Niech $s_n^* = C$. W celu wyznaczenia C wstawiamy rozwiązanie s_n^* bezpośrednio do naszego równania rekurencyjnego, otrzymując:
 $C = 2C + 1$. Stąd $C = -1$, czyli $s_n^* = -1$.

Rekurencje niejednorodne - przykład 2

Zadanie

$$s_1 = 1, s_n = 2s_{n-1} + 1.$$

Skoro tak, na mocy twierdzenia o RLN rozwiązanie ogólne całej rekurencji ma wzór:

$$s_n = c_1 2^n - 1.$$

Podstawiając $n = 1$ otrzymujemy:

$$1 = s_1 = c_1 2^1 - 1 = 2c_1 - 1 \Rightarrow c_1 = 1.$$

Zatem ostateczne rozwiązanie rekurencji to: $s_n = 2^n - 1$.