6a. Rekurencje: zasada indukcji matematycznej

Grzegorz Kosiorowski

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

Rekurencje zapowiedź

Idea rekurencji: odwoływanie się jakiegoś obiektu do samego siebie.
Najczęstsze zastosowanie: „jeśli zaczniemy dobrze i potem niczego nie zepsujemy, to przez cały czas (albo przynajmniej na końcu) będzie dobrze".
Najprostszy związek z programowaniem: pętle.

Motywacja

- Indukcja matematyczna to technika dowodzenia wielu twierdzeń tego samego typu. Jest dobrym przykładem rozumowania rekurencyjnego.
- Częste zastosowanie: dowodzenie poprawności algorytmów.

Zasada indukcji matematycznej

Zasada indukcji matematycznej

Niech $p(m), p(m+1), \ldots$ będzie ciągiem zdań (skończonym lub nieskończonym). Jeśli

1) zdanie $p(m)$ jest prawdziwe (*warunek początkowy*)

i

2) ze zdania $p(k)$ wynika zdanie $p(k+1)$ dla $k \geqslant m$, (*krok indukcyjny*, $\forall_{k \geqslant m} p(k) \Rightarrow p(k+1)$),

to zdanie $p(n)$ jest prawdziwe dla każdego $n \geqslant m$.

Zasada indukcji matematycznej - wyjaśnienie.

Idea zasady indukcji matematycznej:

- Mamy dany (skończony lub nie) ciąg zdań, co do którego chcemy udowodnić, że jest prawdziwy.
- Udowadniamy prawdziwość pierwszego zdania.
- Udowadniamy, że z prawdziwości k-tego zdania wynika prawdziwość $k+1$-wszego.
- Możemy wtedy kolejno analizować: pierwsze zdanie jest prawdziwe z warunku początkowego, z tego wynika prawdziwość zdania drugiego, z którego wynika prawdziwość zdania trzeciego itd., aż dojdziemy do prawdziwości dowolnego zdania z ciągu.

Zasada indukcji matematycznej - przykład ilustrujący

Łatwo zasadę indukcji matematycznej zrozumieć odwołując się do analogii wchodzenia po drabinie. Załóżmy, że wiemy:

- jak wejść na najniższy szczebel,
- jak z dowolnego szczebla wejść na kolejny,

by mieć pewność, że potrafimy wejść na dowolny szczebel drabiny.

Zasada indukcji matematycznej - przykład 1

Zadanie

Czy $37^{500} - 37^{100}$ jest podzielne przez 5?

Liczba, o której mówimy jest daleko poza zasięgiem możliwości szybkiego obliczenia za pomocą komputera, więc potrzebna nam będzie jakaś chytra sztuczka. Do dowodu wykorzystujemy indukcję matematyczną. Za jej pomocą udowodnimy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$, $n^5 - n$ jest podzielne przez 5. Następnie wystarczy podstawić $n = 37^{100}$ i otrzymamy tezę zadania.

Zasada indukcji matematycznej

Zasada indukcji matematycznej

Niech $p(m), p(m+1), \ldots$ będzie ciągiem zdań (skończonym lub nieskończonym). Jeśli

1) zdanie $p(m)$ jest prawdziwe (*warunek początkowy*)

i

2) ze zdania $p(k)$ wynika zdanie $p(k+1)$ dla $k \geqslant m$, (*krok indukcyjny*, $\forall_{k \geqslant m} p(k) \Rightarrow p(k+1)$),

to zdanie $p(n)$ jest prawdziwe dla każdego $n \geqslant m$.

Zasada indukcji matematycznej - przykład 1

Zagadnienie

Czy $n^5 - n$ jest podzielne przez 5 dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$?

Najpierw wykonamy sprawdzenie warunku początkowego:
Dla n=1, $n^5 - n = 1 - 1 = 0$ jest podzielne przez 5.
Zatem warunek początkowy jest spełniony dla n=1.

Zasada indukcji matematycznej - przykład 1

Zagadnienie

Czy $n^5 - n$ jest podzielne przez 5 dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$?

Teraz, zakładając, że teza jest spełniona dla k (czyli, że 5 dzieli $k^5 - k$) musimy udowodnić, że teza jest spełniona dla $k+1$ (czyli, że 5 dzieli $(k+1)^5 - (k+1)$). Zaczynamy od wyrażenia z tezy $((k+1)^5 - (k+1))$ i przekształcamy tak, by gdzieś pojawiło się wyrażenie z założenia $(k^5 - k)$:

$$(k+1)^5 - (k+1) = k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1 - k - 1 =$$

Zasada indukcji matematycznej - przykład 1

Zagadnienie

Czy $n^5 - n$ jest podzielne przez 5 dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$?

Wiemy, że 5 dzieli $k^5 - k$:

$$(k+1)^5 - (k+1) = k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1 - k - 1 =$$

$$= (k^5 - k) + 5(k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k).$$

Obydwa składniki powyższej sumy są podzielne przez 5 (pierwszy z założenia indukcyjnego, drugi, bo 5 jest jego czynnikiem), więc całe wyrażenie jest podzielne przez 5.

Zasada indukcji matematycznej - przykład 1

Zadanie

Czy $37^{500} - 37^{100}$ jest podzielne przez 5?

Skoro sprawdziliśmy zarówno warunek początkowy, jak i krok indukcyjny, to na mocy zasady indukcji matematycznej prawdą jest, że $n^5 - n$ jest podzielne przez 5 dla każdego $n \in \mathbb{N}_+$. Stąd wiemy, że $37^{500} - 37^{100}$ jest podzielne przez 5.

Zasada indukcji matematycznej - przykład 2

Zadanie

Udowodnić, że $n! > 2^n$ dla $n \geqslant 4$.

Sprawdzenie warunku początkowego dla $n = 4$:

$$4! = 24 > 16 = 2^4$$

- zgadza się.
Zakładamy zatem, że dla pewnego $k \geqslant 4$, $k! > 2^k$. Wtedy:
$(k+1)! = k!(k+1) >$ (na mocy założenia indukcyjnego)
$(2^k)(k+1) > (2^k) \cdot 2 = 2^{k+1}$. Czyli $k! > 2^k \Rightarrow (k+1)! > 2^{k+1}$.
Zatem warunek indukcyjny i krok indukcyjny są spełnione, czyli teza indukcji (i zadania) też.

Zasada indukcji matematycznej - przykład mniej poważny

Zadanie

Udowodnić, że wszystkie liczby naturalne mają ciekawe własności.

Sprawdzenie warunku początkowego dla $n = 0$ i $n = 1$: Nie da się ukryć, że 0 i 1 mają ciekawe własności (są np. elementami neutralnymi odpowiednio dodawania i mnożenia). Zatem warunek początkowy jest spełniony.

Zasada indukcji matematycznej - przykład mniej poważny

Zadanie

Udowodnić, że wszystkie liczby naturalne mają ciekawe własności.

Krok indukcyjny: Załóżmy, że liczby $0, 1, \ldots, k$ mają ciekawe własności. Czy stąd wynika, że liczby $0, 1, \ldots, k, (k+1)$ mają ciekawe własności? Ależ tak: wiemy, że $0, 1, \ldots, k$ mają ciekawe własności, więc jedyną możliwością by tak nie było jest to, że $(k+1)$ nie ma ciekawych własności. Ale wtedy $(k+1)$ jest najmniejszą liczbą naturalną, która nie ma żadnych ciekawych własności! A to JEST CIEKAWA WŁASNOŚĆ, prawda? Zatem nie jest możliwe, by któraś z liczb $0, 1, \ldots, k, (k+1)$ nie miała ciekawych własności, krok indukcyjny przechodzi i teza zadania jest prawdziwa.

Zasada indukcji matematycznej - potencjalne błędy

Zasadą indukcji matematycznej trzeba się posługiwać bardzo ściśle i precyzyjnie, bo łatwo zrobić jeden z dwu podstawowych błędów:

- zapomnieć o sprawdzeniu warunku początkowego,
- popełnić błąd w kroku indukcyjnym.

Błędy w indukcji - przykład 1

Zadanie

Udowodnić, że $n = n + 5$ dla każdej liczby naturalnej n.

Krok indukcyjny: Załóżmy, że zdanie jest prawdziwe dla $n = k$ $(k = k + 5)$. Czy możemy stąd udowodnić, że zdanie jest prawdziwe dla $(k + 1)$ $(k + 1 = (k + 1) + 5)$? Tak! $k + 1 =$ (z założenia $k = k + 5)(k + 5) + 1 = (k + 1) + 5$. Zatem krok indukcyjny został sprawdzony.

Oczywiście, twierdzenie jest fałszywe, a dowód nie działa, bo nie sprawdziliśmy warunku początkowego $(1 \neq 1 + 5)$.

Błędy w indukcji - przykład 2

Zadanie

Udowodnić, że wszyscy ludzie są jednakowego wzrostu.

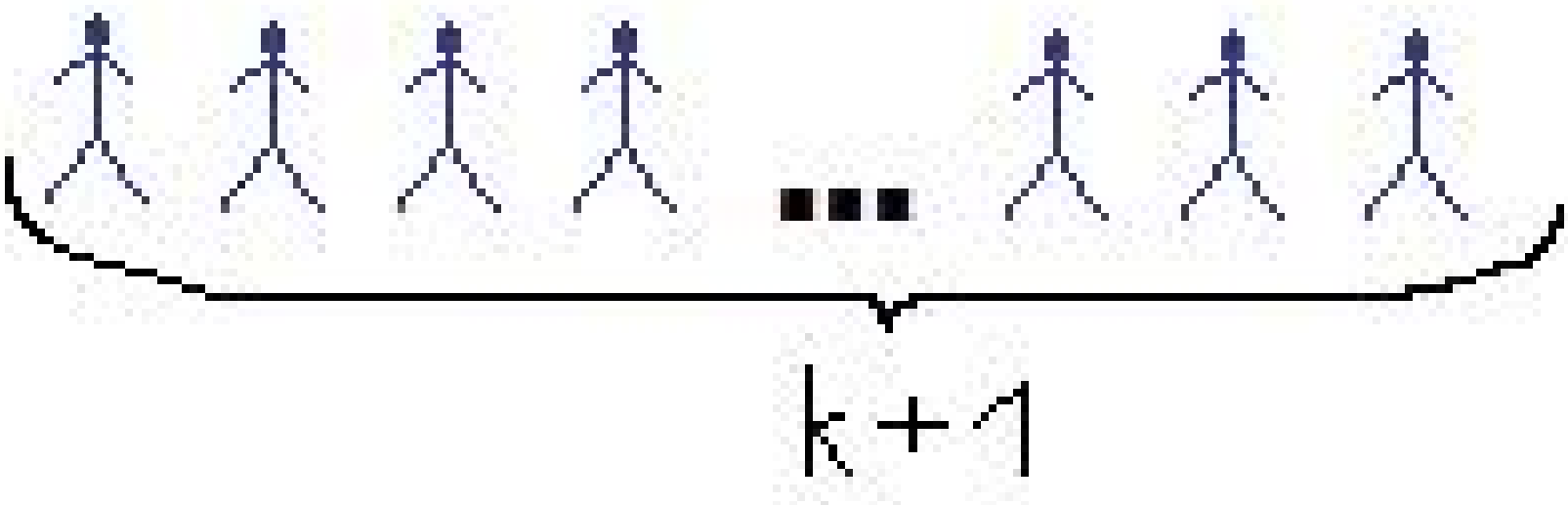
Udowodnimy to przez indukcję ze względu na n - liczbę ludzi w porównywanej (wzrostem) grupie.
Warunek początkowy $n = 1$ jest spełniony. Naturalnie, w 1-osobowej grupie ludzi wszyscy (tj. ta jedna osoba) są tego samego wzrostu.

Błędy w indukcji - przykład 2

Zadanie

Udowodnić, że wszyscy ludzie są jednakowego wzrostu.

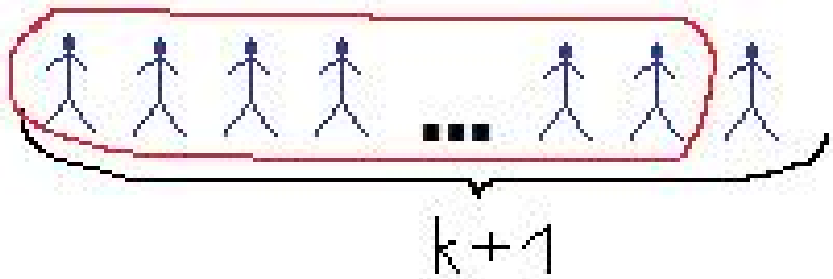
Udowodnimy teraz krok indukcyjny. Zakładamy prawdziwość zdania dla grup k-osobowych i spróbujemy dowieść jego prawdziwości dla grup $k+1$-osobowych. Czyli: zakładamy, że każda k-osobowa grupa ludzi składa się z osób jednakowego wzrostu. Rozważmy grupę $k+1$-osobową.



Błędy w indukcji - przykład 2

Zadanie

Udowodnić, że wszyscy ludzie są jednakowego wzrostu.

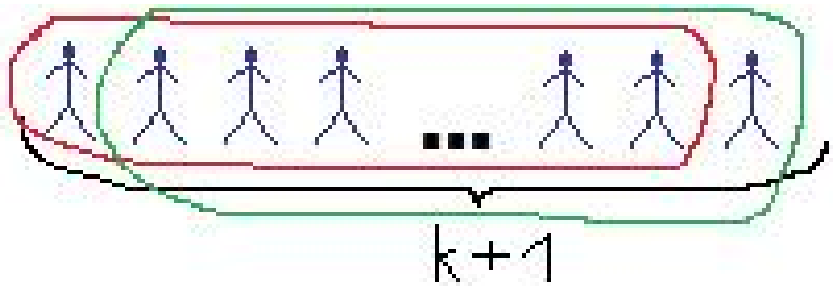


Zgodnie z założeniem indukcyjnym pierwsze k osób w tej grupie jest tego samego wzrostu...

Błędy w indukcji - przykład 2

Zadanie

Udowodnić, że wszyscy ludzie są jednakowego wzrostu.



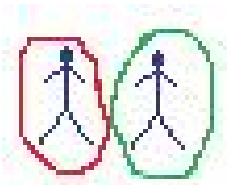
... i ostatnie k osób też. Zatem wszyscy w czerwonej obwódce są tego samego wzrostu i wszyscy w zielonej obwódce są tego samego wzrostu. Ponieważ grupy te mają wspólne elementy (jak na rysunku), wszyscy w tej grupie są tego samego wzrostu, co kończy dowód tezy z zadania.

Błędy w indukcji - przykład 2

Zadanie

Udowodnić, że wszyscy ludzie są jednakowego wzrostu.

Problem tkwi tym razem w sugestywnym, ale błędnym kroku indukcyjnym. Zdanie „Ponieważ grupy te mają wspólne elementy (...)" wydaje się wynikać z rysunku, ale nie jest on dobrym rysunkiem dla $k = 1$:



Problemy z indukcją

Zasada indukcji matematycznej jest narzędziem silnym, ale ograniczonym. Nieczęsto można przy jej pomocy znaleźć odpowiedź na jakieś pytanie. Używamy jej raczej do dowodzenia twierdzeń, co do których mamy już jakieś wskazówki. Stosujemy indukcję najczęściej, gdy:

- Znamy na początku odpowiedź, chcemy ją udowodnić,
- Wiemy, jak wyprowadzić odpowiedź w kolejnym kroku z odpowiedzi w poprzednim kroku.
- Próbujemy zgadnąć prawidłowe rozwiązanie.