3c. Ścieżki krytyczne i drogi maksymalne

Grzegorz Kosiorowski

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

Ogólne uwagi

Tak jak w rozdziale o drogach minimalnych będziemy zakładać, że zajmujemy się grafami skierowanymi z wagami, gdzie wagi w pewnym sensie oznaczają koszt przejścia przez daną krawędź (odległościowy, czasowy, finansowy...).
Zajmiemy się klasą problemów, w których istotne jest znajdowanie nie dróg o jak najmniejszej, lecz o jak największej wadze. Są to zagadnienia wyznaczania tak zwanej ścieżki krytycznej w szeregowaniu zadań w procesach wymagających wielu pojedynczych kroków. Jest to podstawa popularnej w zarządzaniu procesami metody PERT (Program Evaluation and Review Technique) lub ogólnej klasy metod CPM (Critical Path Method).

Sieć zdarzeń

Sieć zdarzeń

Siecią zdarzeń nazywamy acykliczny graf skierowany z nieujemnymi wagami, jednym źródłem (które będziemy oznaczać St - start) i jednym ujściem (które będziemy oznaczać Fi - finish).

W tej prezentacji rozpatrujemy tylko sieci zdarzeń. Dodatkowo zakładamy, że ich wierzchołki są uporządkowane według etykietowania uporządkowanego (to będzie mieć znaczenie dopiero w algorytmie). Na przykładzie wyjaśnimy, w jaki sposób za ich pomocą modeluje się wielokrokowe procesy.

Sieć zdarzeń - przykład

Powiedzmy, że chcemy zorganizować turniej szachowy. By do tego doprowadzić, musimy wykonać następujący zestaw działań (w nawiasach zapiszę przewidywany czas potrzebny na wykonanie tych działań w dniach i które działania trzeba wykonać przed obecnie rozważanym).

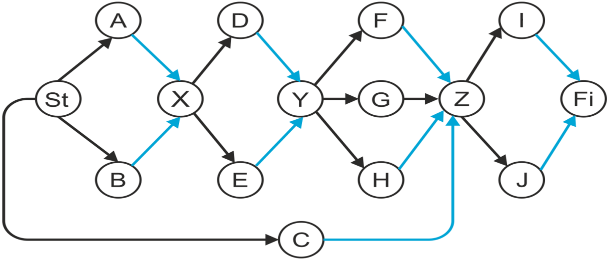
- A. Zdobycie finansowania koniecznego do organizacji turnieju (10, nic)
- B. Zapewnienie sali gry (2, nic)
- C. Poszukiwania dodatkowych sponsorów zwiększających fundusz nagród (40, nic)
- D. Rejestracja turnieju w Polskim Związku Szachowym (3, A,B)
- E. Przygotowanie oficjalnego ogłoszenia turnieju (1,A,B)

Sieć zdarzeń - przykład

- F. Zapisy uczestników turnieju (30, D,E)
- G. Zatrudnienie sędziego (5,D,E)
- H. Wypożyczenie i transport szachownic i zegarów szachowych (3,D,E)
- I. Ogłoszenie ostatecznego regulaminu turnieju oraz nagród za poszczególne miejsca (1, C,F,G,H)
- J. Przygotowanie sali gry do turnieju (2, C,F,G,H)

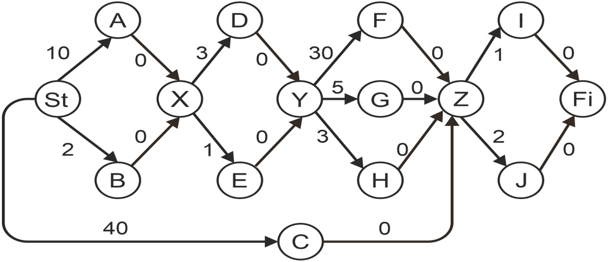
Jest wiele możliwych przedstawień schematu przygotowań do turnieju w postaci grafu. My wybierzemy najbardziej pasujący do naszego wykładu.

Sieć zdarzeń - przykład



Wierzchołki tego grafu oznaczają pewne etapy wykonania planu, krawędzie - odpowiednie czynności. Etapy A-J oznaczają zakończenia działań A-J, etapy X, Y i Z są wprowadzone sztucznie, by zaznaczyć zakończenia grup działań niezbędnych do wykonania kolejnych działań (dlatego na niebieskich krawędziach nie są wykonywane żadne czynności).

Sieć zdarzeń - przykład



Graf ten można zmienić w graf z wagami, dopisując czas wykonania działań przy odpowiednich krawędziach. W takim grafie kluczowe jest znalezienie tak zwanej ścieżki krytycznej, czyli drogi maksymalnej od źródła do ujścia.

Sieć zdarzeń - przykład

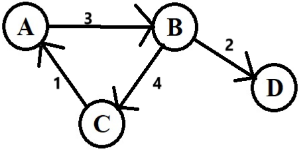
Droga maksymalna

W skierowanym grafie acyklicznym z wagami *drogą maksymalną* od wierzchołka u do wierzchołka v nazywamy drogę, która ma największą możliwą wagę. Tę wagę nazywamy *wagą maksymalną*.

Ścieżka krytyczna

W sieci zdarzeń *ścieżką krytyczną* od wierzchołka u do wierzchołka v nazywamy drogę maksymalną ze źródła do ujścia. Krawędzie należące do ścieżki krytycznej to *krawędzie krytyczne*.

Droga maksymalna - wyjaśnienie

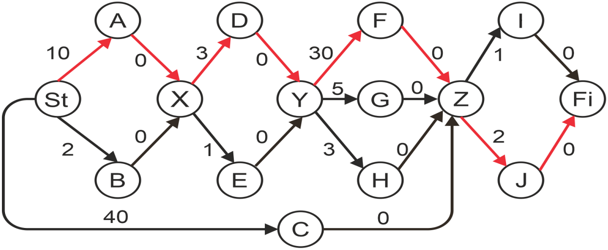


Dlaczego do zdefiniowania drogi maksymalnej potrzebujemy założenia, że graf jest acykliczny, choć nie było potrzebne przy poszukiwaniu drogi minimalnej? Jeśli graf, w którym takiej drogi szukamy, zawierałby cykle, to moglibyśmy skonstruować drogę z dowolnego wierzchołka do dowolnego innego o dowolnie dużej wadze wielokrotnie przechodząc wokół cyklu. Na przykład w powyższym grafie, każde kolejne przejście cyklu ABC przed przejściem krawędzi BD powiększa wagę drogi np. z A do D o 8.

Ścieżka krytyczna - uwagi

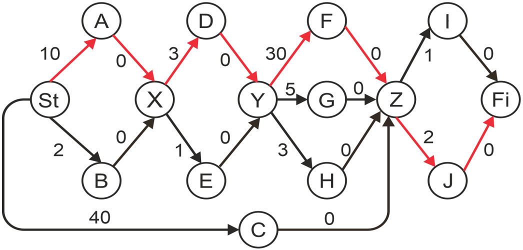
- Kluczowość ścieżki krytycznej dla projektu wynika z faktu, że jej waga jest minimalnym czasem wykonania całego projektu. Dowolne opóźnienie któregokolwiek z działań reprezentowanych przez krawędzie krytyczne prowadzi do opóźnienia wykonania projektu; podobnie przyspieszenie działania opisanego przez krawędź krytyczną powinno doprowadzić do przyspieszenia wykonania projektu.
- Analogicznie, usprawnianie lub (nieznaczne) opóźnianie działań z krawędzi niekrytycznych nie zmieni czasu wykonania projektu.
- Ścieżka krytyczna nie musi być jedyna; wiele ścieżek krytycznych jest wręcz oznaką dobrej konstrukcji projektu.
- Szczegółowe badania sieci zdarzeń i jej krawędzi pozwala uzyskać inne informacje kluczowe dla projektu, jednak wykracza to poza obszar zainteresowania teorii grafów.

Sieć zdarzeń - przykład



W naszym przykładzie, ścieżka krytyczna jest zaznaczona na czerwono, ma wagę 45. Oznacza to, że krytyczne są operacje A,D,F i J - jeśli czas trwania projektu jest dla nas ważny, należy szczególnie zadbać, żeby w tych działaniach nie doszło do żadnych opóźnień, a idealnie by było jakby się dało przyspieszć ich realizację. Z kolei np. działanie C można zacząć z lekkim opóźnieniem albo trochę przedłużyć i nie wpłynie to na czas realizacji projektu (podobnie jak usprawnienie działania C).

Motywacja



Przykład powyżej (i w praktyce, przykłady, które mogę przedstawić) jest dość prosty i można znaleźć ścieżkę krytyczną po prostu odpowiednio długo przyglądając się grafowi. Natomiast w sytuacji, gdy sieć zdarzeń składa się z setek czynności i etapów, wyznaczenie ścieżki krytycznej może nie być takie łatwe. Dlatego teraz przedstawimy ogólny algorytm wyznaczania drogi i wagi maksymalnej.

Modyfikacja algorytmu Dijkstry

Punktem wyjścia do stworzenia algorytmu wyznaczania drogi maksymalnej jest algorytm Dijkstry. Na przykład wskaźniki w naszym algorytmie mogą działać praktycznie tak samo. Musimy wziąć pod uwagę następujące różnice:

- Szukamy drogi maksymalnej, nie minimalnej, więc w algorytmie nierówność wiodąca do zastępowania starej odległości przez nową powinna być skierowana przeciwnie, a drogi nieistniejące (lub nieznalezione) mają wagę $-\infty$ zamiast ∞.
- Pracujemy tylko na grafach acyklicznych, więc możemy założyć, że wierzchołki są poddane etykietowaniu uporządkowanemu. Dzięki temu nie pojawiają się połączenia z wierzchołków „późniejszych" do „wcześniejszych", więc wiemy z góry, że wierzchołki będą „blokowane" po kolei i nie musimy sprawdzać, który zablokować w danym kroku. Nie musimy też zapisywać zbioru L.

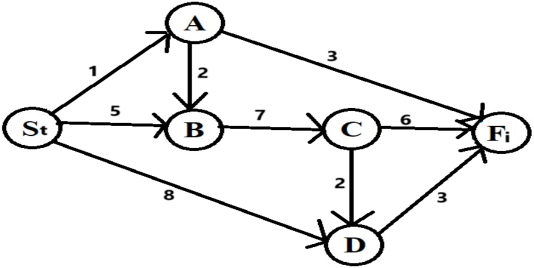
Algorytm wyznaczania drogi maksymalnej

DROGA MAKSYMALNA

Dane: Graf $G = (V(G), E(G))$ skierowany acykliczny, $V(G) = \{1, \ldots, n\}$ - etykietowanie uporządkowane, funkcją W wag („długości") krawędzi o wartościach nieujemnych (jeśli krawędź (v, w) nie istnieje to podstawiamy $W(v, w) = -\infty$).
Zmienne: d, p - funkcje.

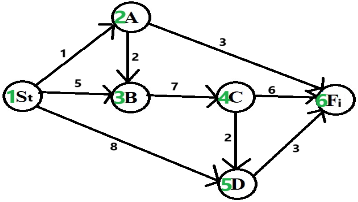
- I. Dla $i \in V$ wykonuj: jeśli $(1, i) \in E(G)$, to $d(i) := W(1, i)$ i $p(i) := 1$.
- II. Dla $k = 2$ do $n - 1$ wykonuj
- II.1. Dla $j = k + 1$ do n wykonuj: jeśli $d(j) < d(k) + W(k, j)$ to $d(j) := d(k) + W(k, j)$ i $p(j) := k$.
- **Rezultat**: $d(j)$ - minimalna waga drogi z 1 do j, $p(j)$ -wskaźnik poprzednika w drodze maksymalnej z 1 do j.

Droga maksymalna - przykład



Wykonamy algorytm DROGA MAKSYMALNA dla powyższej sieci zdarzeń. Przed rozpoczęciem musimy ponumerować wierzchołki zgodnie z etykietowaniem uporządkowanym. Numer 1 musi otrzymać *jakieś* źródło, więc to będzie wierzchołek St, numer 2 A, numer 3 B, numer 4 C, numer 5 D, numer 6 Fi (numerowanie nie musi być zgodne z kolejnością alfabetyczną, tak wyszło przypadkiem).

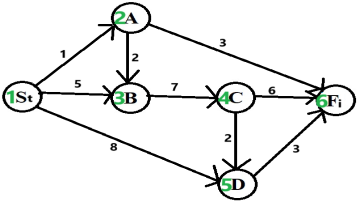
Droga maksymalna - przykład



Od tej pory będę zamiennie odnosił się do wierzchołków, czasem literowo, czasem liczbowo (numerowanie na zielono). Działanie algorytmu dróg maksymalnych zapiszemy w tabeli podobnej do tabeli algorytmu Dijkstry:

Nr etapu	d,p(A)	d,p(B)	d,p(C)	d,p(D)	d,p(Fi)
1					
2					

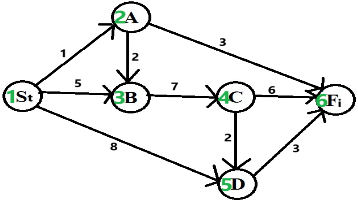
Droga maksymalna - przykład



Wykonujemy krok I, czyli ustalenie początkowych wag i indeksów. Sąsiadom wierzchołka St przypisujemy wagę krawędzi ich łączącej i wskaźnik St, pozostałym wierzchołkom wagę $(-\infty)$ i wskaźnik neutralny (na przykład 0).

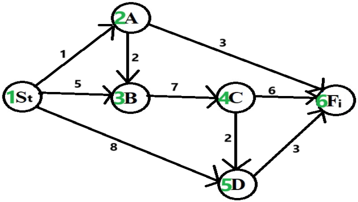
Nr etapu	d,p(A)	d,p(B)	d,p(C)	d,p(D)	d,p(Fi)
1	1 St	5 St	$-\infty$ 0	8 St	$-\infty$ 0

Droga maksymalna - przykład



Rozpoczynamy pętlę, ustalając $k = 2 \sim A$, czyli szukając dłuższych tras przez wierzchołek A. Innymi słowy, dla każdego wierzchołka j, który występuje po A porównujemy wartości $d(j)$ i $d(A) + W(A, j)$. Jeśli ta druga wartość jest większa, aktualizujemy wagę i wskaźnik. Dla wierzchołka B $5 = d(B) > d(A) + W(A, B) = 1 + 2 = 3$, więc nic się w tej kolumnie nie zmienia. Dla wierzchołka C także, bo $-\infty = d(C) = d(A) + W(A, C) = 1 - \infty = -\infty$. (używamy tutaj symbolicznego uproszczenia zakładając, że suma nieskończoności i liczby to nadal nieskończoność, a nieskończoności są sobie równe).

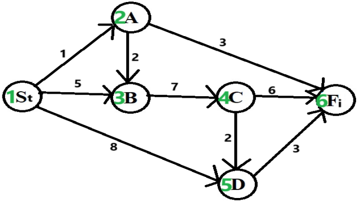
Droga maksymalna - przykład



Dla wierzchołka D $8 = d(D) > d(A) + W(A, D) = 1 - \infty = -\infty$, więc nic się w tej kolumnie nie zmienia. Natomiast dla wierzchołka Fi $-\infty = d(Fi) < d(A) + W(A, Fi) = 1 + 3 = 4$, więc nadpisujemy: $d(Fi) := 4$, $p(Fi) := A$.

Nr etapu	d,p(A)	d,p(B)	d,p(C)	d,p(D)	d,p(Fi)
1	1 St	5 St	$-\infty$ 0	8 St	$-\infty$ 0
2	1 St	5 St	$-\infty$ 0	8 St	4A

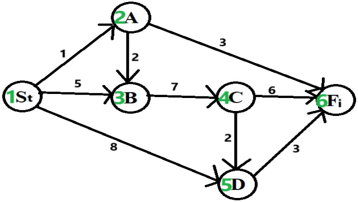
Droga maksymalna - przykład



Kolejny obieg pętli $k = 3 \sim B$; analogicznie szukamy dłuższych tras przez wierzchołek B. Nie badamy już wierzchołka A, gdyż wiemy na podstawie uporządkowania, że żadne nierozpatrzone drogi z St do niego nie prowadzą.

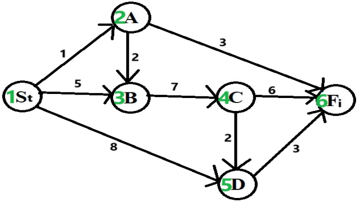
Dla wierzchołka C $-\infty = d(C) < d(B) + W(B, C) = 5 + 7 = 12$, więc aktualizujemy $d(C) := 12$, $p(C) := B$. Dla wierzchołków D i Fi brak zmian, bo $8 = d(D) = d(B) + W(B, D) > 5 - \infty = -\infty$ i $4 = d(Fi) > d(B) + W(B, D) = 5 - \infty = -\infty$.

Droga maksymalna - przykład



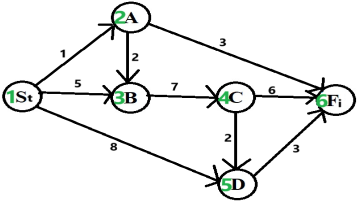
Nr etapu	d,p(A)	d,p(B)	d,p(C)	d,p(D)	d,p(Fi)
2	1 St	5 St	$-\infty$ 0	8 St	4A
3	1 St	5 St	12B	8 St	4A

Droga maksymalna - przykład



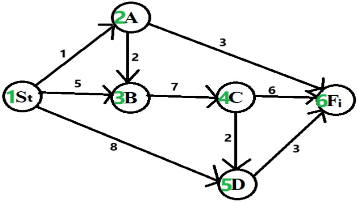
Kolejny obieg pętli $k = 4 \sim C$; analogicznie szukamy dłuższych tras przez wierzchołek C do dalszych wierzchołków.
Dla wierzchołka D $8 = d(D) < d(C) + W(C, D) = 12 + 2 = 14$, więc aktualizujemy $d(D) := 14$, $p(D) := C$. Dla wierzchołka Fi $4 = d(Fi) < d(C) + W(C, Fi) = 12 + 6 = 18$, więc aktualizujemy $d(Fi) := 18$, $p(Fi) := C$.

Droga maksymalna - przykład



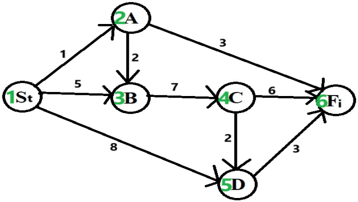
Nr etapu	d,p(A)	d,p(B)	d,p(C)	d,p(D)	d,p(Fi)
3	1 St	5 St	12B	8 St	4A
4	1 St	5 St	12B	14C	18C

Droga maksymalna - przykład



W ostatnim obiegu pętli $k = 5 = n - 1 \sim D$ nic się nie zmieni, gdyż $18 = d(Fi) > d(D) + W(D, Fi) = 14 + 3 = 17$.

Droga maksymalna - przykład



Ostatecznie otrzymujemy tabelę ilustrującą przebieg algorytmu:

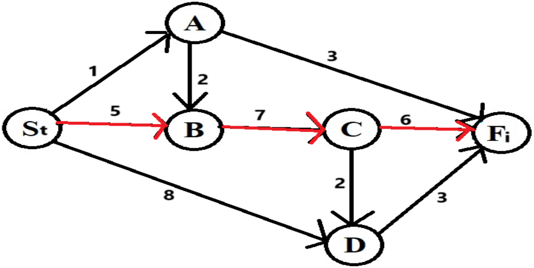
Nr etapu	d,p(A)	d,p(B)	d,p(C)	d,p(D)	d,p(Fi)
1	1 St	5 St	$-\infty$ 0	8 St	$-\infty$ 0
2	1 St	5 St	$-\infty$ 0	8 St	4A
3	1 St	5 St	12B	8 St	4A
4	1 St	5 St	12B	14C	18C
5	1 St	5 St	12B	14C	18C

Droga maksymalna - przykład

Z ostatniej linijki tabeli

Nr etapu	d,p(A)	d,p(B)	d,p(C)	d,p(D)	d,p(Fi)
5	1 St	5 St	12B	14C	18C

mogę odczytać wagę maksymalną drogi z St do Fi (18) i drogę maksymalną/ścieżkę krytyczną: p(Fi)=C, p(C)=B, P(B)=St, więc ta droga to StBCFi.



Uwagi dotyczące algorytmu drogi maksymalnej i jego zapisu

- Od wiersza o numerze k wartości d i p wierzchołków o numerach od 1 do $k+1$ już się nie zmieniają.
- W każdym kroku ustalamy maksymalną odległość jednego wierzchołka, więc algorytm (i jego tabelka) powinien mieć tyle kroków, ile jest wierzchołków (poza startowym) w tej samej składowej spójnej grafu.
- Dla grafu $G = (V, E)$, czas działania algorytmu dróg maksymalnych to $O(|V|^2)$, niezależnie czy uwzględniamy w tym potrzebę wykonania etykietowania uporządkowanego, czy nie.