

24 II 2024

Informacje dla zdających:

1. Egzamin trwa 90 minut. Nikt nie wychodzi w ciągu ostatnich 10 minut.
 2. Podczas egzaminu wolno korzystać jedynie z kalkulatora, narzędzi do pisania i materiałów otrzymanych od prowadzących egzamin. Wszelkie przedmioty poza wspomnianymi powinny być pozostawione w torbach/plecakach we wskazanym przez egzaminujących miejscu. W szczególności nie wolno używać telefonów komórkowych i własnych kartek.
 3. Wszystkie kartki z rozwiązaniami należy podpisać imieniem i nazwiskiem.
 4. Definicje i twierdzenia w zadaniu 5 nie muszą być zapisywane formalnie, mogą być podane własnymi słowami.
-

Zadania:

1. (400 punktów) Najwyższy Sąd w państwie Probabilia składa się z 8000 sędziów. Każdy sędzia ma jednoznacznie przypisany numer (od 1 do 8000).

a) Prezydent Probabilii uznał, że członkowie Najwyższego Sądu, których numery są większe od 500 i podzielne przez 6, 7 lub 15 (i tylko tacy) zostali wybrani w sposób nielegalny. Ilu sędziów Najwyższego Sądu, według prezydenta, zostało wybranych w sposób legalny?

b) Spośród członków Najwyższego Sądu wyznaczono 90 sędziów, którzy mają przewodniczyć obradom podczas rozpraw dotyczących zgodności z konstytucją 90 ustaw (każdy przewodniczy rozprawie na temat jednej ustawy). Spośród nich 13 zostało wyznaczonych przez partię „Grafy są najważniejsze”, 16 przez Sojusz Probabilistyczny, 25 przez Platformę Algebraików, a pozostali przez rządzące ugrupowanie Pochodna i Całka. Na ile sposobów można przyporządkować ustawy przewodniczącym, jeśli założymy, że nie jest istotne, jaki konkretnie sędzia przewodniczy obradom, a jedynie, przez jakie ugrupowanie został wyznaczony (bo każdy sędzia prowadzi obrady zgodnie z wytycznymi „swojej” partii).

c) Najwyższy Sąd w pełnym składzie obradował nad uchwałą o legalizacji dzielenia przez 0. Podczas głosowania sędziowie mieli do wyboru 4 opcje: uznać uchwałę za zgodną z konstytucją, uznać ją za niezgodną z konstytucją, wstrzymać się od głosu lub zagłosować za przełożeniem podjęcia decyzji na następne posiedzenie, po wezwaniu i przesłuchaniu dodatkowych biegłych. Ile jest możliwych wyników głosowania, jeśli wiemy, że pierwsze dwie opcje wybrało po co najmniej 1000 sędziów, a dwie kolejne po co najmniej 500 sędziów?

d) Telewizja publiczna Probabilii postanowiła zrealizować program o Najwyższym Sądzie. Do występu zgłosiło się 50 chętnych sędziów. Rozważane są dwie koncepcje tego programu: albo ciąg wywiadów z 20 różnymi sędziami (kolejność wywiadów jest istotna, sędziowie z którymi są prowadzone wywiady nie mogą się powtarzać), albo dwie symulacje przykładowych rozpraw, w których miałyby brać udział po 30 sędziów (kolejność rozpraw jest istotna, każdy sędzia może wziąć udział w obydwu rozprawach, chociaż oczywiście w każdej z osobna bierze udział 30 różnych sędziów). Na ile sposobów łącznie można zrealizować ten program?

2. (400 pkt) Rozwiązać następujące zagadnienie rekurencyjne:

$$s_{n+1} = 4s_n + 21s_{n-1} + 20 \cdot (-3)^n; s_0 = 5, s_1 = 11.$$

3. a) (200 pkt) Wskazać spośród par: $(99, 13)$, $(133, 59)$, $(39, 16)$ tę, która może być kluczem publicznym w systemie RSA i uzasadnić, dlaczego pozostałe dwie nie mogą. Dla poprawnej pary wyznaczyć klucz prywatny, a następnie obliczyć, jaka jednostka tekstu jawnego zostanie odszyfrowana z jednostki szyfrogramu o numerze 12.

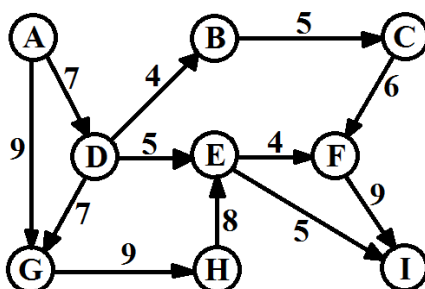
b) (100 pkt) Za pomocą twierdzenia Eulera obliczyć resztę z dzielenia liczby 20^{147} przez 117.

c) (100 pkt) Obliczyć $\varphi(34425)$.

4. (400 punktów)

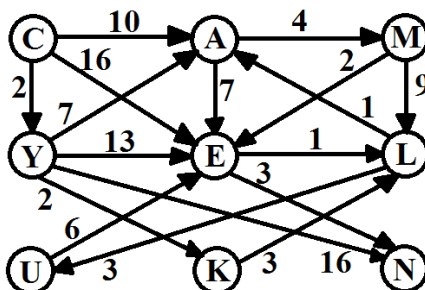
a) Za pomocą algorytmu Edmondsa-Karpa znaleźć maksymalny przepływ pomiędzy wierzchołkami A oraz I w poniższym grafie skierowanym. Uzupełnić odpowiednią tabelę przebiegu algorytmu i narysować graf z oznaczonym maksymalnym przepływem.

Nr etapu	Ścieżka powiększająca	Przepustowość	Alternatywy
----------	-----------------------	---------------	-------------



b) Zastosować algorytm Dijkstry ze wskaźnikami do wyznaczenia drogi o najmniejszej wadze od wierzchołka C do wierzchołka N poniższego grafu. Przebieg algorytmu zapisać w tabeli o nagłówkach jak poniżej. Zapisać tę drogę i jej wagę.

Nr etapu	Zbiór L	$d(A)p(A)$	$d(E)p(E)$...	$d(Y)p(Y)$
----------	---------	------------	------------	-----	------------



5. (400 punktów) a) Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych.

b) Narysować po jednym przykładzie grafu prostego i spójnego o co najmniej 5 wierzchołkach i 5 krawędziach spełniającym następujące warunki lub uzasadnić dlaczego taki graf nie istnieje:

I. Graf jest hamiltonowski, dwudzielny i jego indeks chromatyczny wynosi 2.

II. Graf nie jest hamiltonowski, ale jest dwudzielny i jego liczba chromatyczna wynosi 3.

III. Graf $V_1 \cup V_2$, który jest dwudzielny, $|V_1| \leq |V_2|$, ale graf nie posiada skojarzenia pełnego.

IV. Graf jest dwudzielny, eulerowski, ale nie hamiltonowski.