

3 II 2024

Informacje dla zdających:

1. Egzamin trwa 90 minut. Nikt nie wychodzi w ciągu ostatnich 10 minut.
 2. Podczas egzaminu wolno korzystać jedynie z kalkulatora, narzędzi do pisania i materiałów otrzymanych od prowadzących egzamin. Wszelkie przedmioty poza wspomnianymi powinny być pozostawione w torbach/plecakach we wskazanym przez egzaminujących miejscu. W szczególności nie wolno używać telefonów komórkowych i własnych kartek.
 3. Wszystkie kartki z rozwiązaniami należy podpisać imieniem i nazwiskiem.
 4. Definicje i twierdzenia w zadaniu 5 nie muszą być zapisywane formalnie, mogą być podane własnymi słowami.
-

Zadania:

1. (400 punktów) Firma DCPlan produkująca gry komputerowe zatrudnia 70 pracowników podzielonych na 4 grupy: 22 programistów, 21 grafików, 15 testerów i 12 projektantów fabuły i mechaniki. Obecnie zajmują się tworzeniem 4 gier o roboczych nazwach GRA1, GRA2, GRA3 i GRA4. Każdy pracuje nad co najmniej jedną grą.

a) Z tych 70 osób, nad wszystkimi 4 grami jednocześnie pracuje 13, jednocześnie nad wszystkimi poza GRA1 - 18, poza GRA2 - 20, poza GRA3 - 23, poza GRA4 - 25. Jednocześnie nad GRA1 i GRA2 pracuje 35 osób, podobnie jak nad GRA1 i GRA3 oraz GRA1 i GRA4. Nad GRA2 i GRA3 pracują 34 osoby, nad GRA2 i GRA4 - 30 osób, a nad GRA3 i GRA4 - 29 osób. Ile osób pracuje nad GRA1, jeśli nad GRA2 pracują 54 osoby, nad GRA3 - 42 osoby, a nad GRA4 - 39 osób?

b) Na targi gier komputerowych ma pojechać reprezentacja firmy złożona z 11 pracowników. Na ile sposobów można rozdzielić te 11 miejsc pomiędzy grupy, jeśli wiemy, że z każdej z grup musi pojechać chociaż jedna osoba (istotne jest tylko, ile osób z każdej grupy pojedzie na targi, a nie konkretnie kto to będzie)?

c) Na ile sposobów z pracowników DCPlanu można wybrać grupę 20 osób, które mają ocenić koncepcję nowego produktu GRA5, jeśli wiemy, że w tej grupie musi być dokładnie 3 grafików, 4 projektantów i co najwyżej 2 testerów? Na potrzeby tego podpunktu zakładamy, że wszyscy pracownicy są rozróżnialni.

d) W siedzibie firmy znajduje się 70 ponumerowanych stanowisk pracy. Na ile sposobów te stanowiska mogą być przygotowane dla pracowników, jeśli wiemy, że stanowiska osób należących do tej samej grupy są przygotowywane dokładnie tak samo (tj. nie ma żadnej różnicy pomiędzy przygotowaniem stanowisk np. dwóch grafików)?

2. (400 pkt) Rozwiązać następujące zagadnienie rekurencyjne:

$$s_{n+1} = 6s_n + 16s_{n-1} - 50 \cdot 3^n, s_0 = -1, s_1 = -8.$$

3. a) (150 pkt) Czy istnieje para liczb całkowitych (x, y) spełniająca równanie $9282x + 8400y = 126$? Jeśli istnieje, wyznaczyć przynajmniej jedną taką parę, jeśli nie, uzasadnić dlaczego.

b) (100 pkt) Wyznaczyć wartość $\varphi(8775)$.

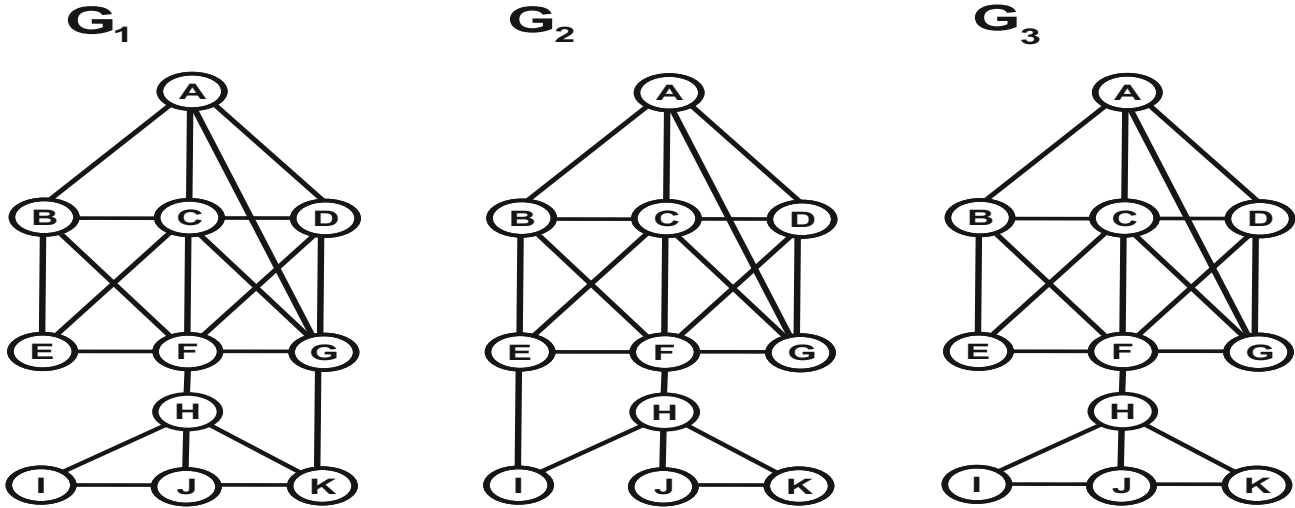
c) (150 pkt) Rozwiązać układ kongruencji:

$$\begin{cases} 7x + 2y \equiv_{13} 9 \\ 4x - 5y \equiv_{13} 6 \end{cases}$$

4. (400 punktów)

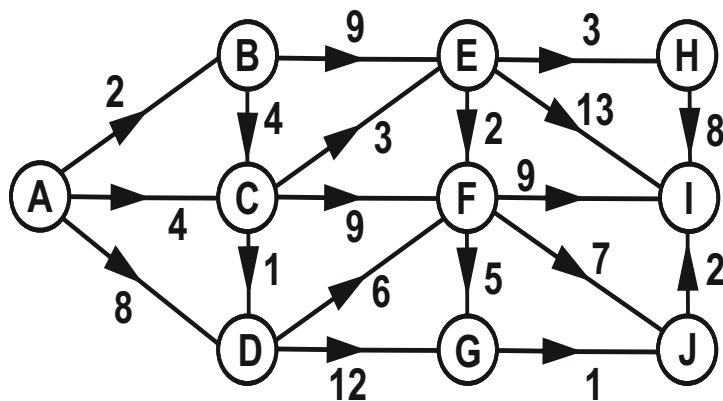
- a) Dla każdego z grafów G_1, G_2, G_3 sprawdzić, czy występuje w nim cykl lub droga Eulera. Odpowiedź uzasadnić powołując się na odpowiednie twierdzenie. Jeśli dla któregoś z grafów będzie istnieć droga Eulera, ale nie cykl Eulera, wykorzystać algorytm Fleury'ego do znalezienia jednej z tych dróg, zapisując przebieg algorytmu w tabeli o nagłówkach jak poniżej. Zapisać odpowiedź w postaci ciągu kolejnych wierzchołków na tej drodze.

Nr etapu	Wybór	Alternatywy
----------	-------	-------------



- b) Zastosować algorytm Dijkstry ze wskaźnikami do wyznaczenia drogi o najmniejszej wadze pomiędzy wierzchołkami A i I poniższego grafu. Przebieg algorytmu zapisać w tabeli o nagłówkach jak poniżej. Zapisać tę drogę i jej wagę.

Nr etapu	Zbiór L	$d(B)p(B)$	$d(C)p(C)$...
----------	---------	------------	------------	-----



5. (400 punktów) a) Opisać działanie algorytmu RSA, w szczególności jak wyglądają klucze kodowania i dekodowania w tym algorytmie, jakie warunki muszą spełniać liczby tworzące te klucze i jak za pomocą tych kluczy wyrażona jest funkcja kodująca i dekodująca algorytmu RSA.

b) Wyjaśnić pojęcia: indeks chromatyczny, maksymalny stopień grafu i podać wypowiedź twierdzenia Vizinga. Podać przykład grafu o przynajmniej 5 wierzchołkach i 5 krawędziach, dla którego jedna z nierówności w twierdzeniu Vizinga jest równością oraz grafu o przynajmniej 5 wierzchołkach i 5 krawędziach, dla którego druga z nierówności w twierdzeniu Vizinga jest równością.