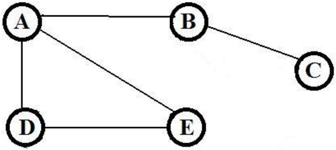
5. Wstępne pojęcia teorii grafów

Grzegorz Kosiorowski

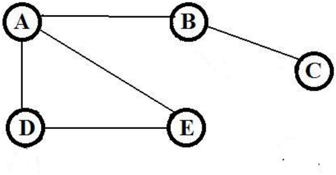
Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

Graf, jaki jest, każdy widzi

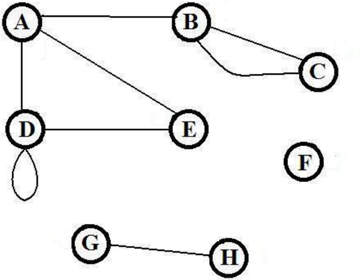


To oczywiście jest graf.

Graf, jaki jest, każdy widzi

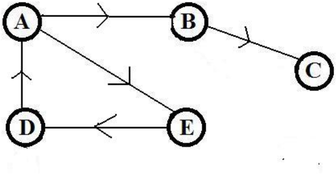


To oczywiście jest graf.



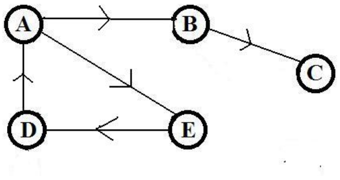
A czy to też?

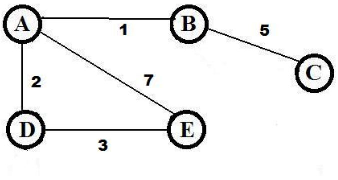
Graf, jaki jest, każdy widzi



Możemy chcieć zaznaczyć „jednokierunkowość” krawędzi.

Graf, jaki jest, każdy widzi





Możemy chcieć zaznaczyć „jednokierunkowość” krawędzi.

Lub ich „długość”.

Do czego służą grafy? Przykłady zastosowań

Do czego służą grafy? Przykłady zastosowań

- Mapa drogowa (np. znajdowanie najkrótszej drogi)

Do czego służą grafy? Przykłady zastosowań

- Mapa drogowa (np. znajdowanie najkrótszej drogi)
- Schemat blokowy algorytmu (wybór najmniej kosztochłonnej ścieżki rozwiązania problemu).

Do czego służą grafy? Przykłady zastosowań

- Mapa drogowa (np. znajdowanie najkrótszej drogi)
- Schemat blokowy algorytmu (wybór najmniej kosztochłonnej ścieżki rozwiązania problemu).
- Sieć kontaktów międzyludzkich (zoptymalizowanie przepływu informacji, zlokalizowanie kluczowych osób, analiza handlu między firmami).

Do czego służą grafy? Przykłady zastosowań

- Mapa drogowa (np. znajdowanie najkrótszej drogi)
- Schemat blokowy algorytmu (wybór najmniej kosztochłonnej ścieżki rozwiązania problemu).
- Sieć kontaktów międzyludzkich (zoptymalizowanie przepływu informacji, zlokalizowanie kluczowych osób, analiza handlu między firmami).
- Drzewo genealogiczne (wyszukiwanie stopnia pokrewieństwa).

Do czego służą grafy? Przykłady zastosowań

- Mapa drogowa (np. znajdowanie najkrótszej drogi)
- Schemat blokowy algorytmu (wybór najmniej kosztochłonnej ścieżki rozwiązania problemu).
- Sieć kontaktów międzyludzkich (zoptymalizowanie przepływu informacji, zlokalizowanie kluczowych osób, analiza handlu między firmami).
- Drzewo genealogiczne (wyszukiwanie stopnia pokrewieństwa).
- Wiązania między cząsteczkami (badania struktur chemicznych i biologicznych)

Do czego służą grafy? Przykłady zastosowań

- Mapa drogowa (np. znajdowanie najkrótszej drogi)
- Schemat blokowy algorytmu (wybór najmniej kosztochłonnej ścieżki rozwiązania problemu).
- Sieć kontaktów międzyludzkich (zoptymalizowanie przepływu informacji, zlokalizowanie kluczowych osób, analiza handlu między firmami).
- Drzewo genealogiczne (wyszukiwanie stopnia pokrewieństwa).
- Wiązania między cząsteczkami (badania struktur chemicznych i biologicznych)
- Sieć komputerowa z połączeniami (optymalizacja przepływu informacji, badanie przepustowości sieci)

Do czego służą grafy? Przykłady zastosowań

- Mapa drogowa (np. znajdowanie najkrótszej drogi)
- Schemat blokowy algorytmu (wybór najmniej kosztochłonnej ścieżki rozwiązania problemu).
- Sieć kontaktów międzyludzkich (zoptymalizowanie przepływu informacji, zlokalizowanie kluczowych osób, analiza handlu między firmami).
- Drzewo genealogiczne (wyszukiwanie stopnia pokrewieństwa).
- Wiązania między cząsteczkami (badania struktur chemicznych i biologicznych)
- Sieć komputerowa z połączeniami (optymalizacja przepływu informacji, badanie przepustowości sieci)
- Schemat fragmentu Internetu z linkami między stronami (algorytm Google Page Rank)

Do czego służą grafy? Przykłady zastosowań

- Mapa drogowa (np. znajdowanie najkrótszej drogi)
- Schemat blokowy algorytmu (wybór najmniej kosztochłonnej ścieżki rozwiązania problemu).
- Sieć kontaktów międzyludzkich (zoptymalizowanie przepływu informacji, zlokalizowanie kluczowych osób, analiza handlu między firmami).
- Drzewo genealogiczne (wyszukiwanie stopnia pokrewieństwa).
- Wiązania między cząsteczkami (badania struktur chemicznych i biologicznych)
- Sieć komputerowa z połączeniami (optymalizacja przepływu informacji, badanie przepustowości sieci)
- Schemat fragmentu Internetu z linkami między stronami (algorytm Google Page Rank)
- Sieci elektryczne (projektowanie takich sieci, minimalizacja kosztów)

Definicja grafu

Graf

Grafem lub *grafem ogólnym* nazywamy parę $G = (V, E)$, gdzie:
1) V (czasem zapisywany $V(G)$) jest zbiorem *wierzchołków* (*węzłów*, *punktów*)
2) E (czasem zapisywany $E(G)$) jest rodziną *krawędzi* (które mogą się powtarzać), czyli jedno- i dwu-elementowych podzbiorów V.

Definicja grafu

Graf

Grafem lub *grafem ogólnym* nazywamy parę $G = (V, E)$, gdzie:
1) V (czasem zapisywany $V(G)$) jest zbiorem *wierzchołków* (*węzłów*, *punktów*)
2) E (czasem zapisywany $E(G)$) jest rodziną *krawędzi* (które mogą się powtarzać), czyli jedno- i dwu-elementowych podzbiorów V.

Będziemy się zajmować głównie grafami *skończonymi* tj. o skończonej liczbie wierzchołków i krawędzi. Jeśli nie jest napisane inaczej, zakładamy, że graf w danej definicji lub twierdzeniu jest skończony.

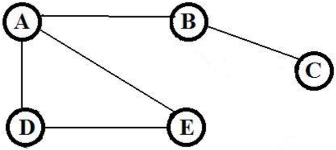
Definicja grafu

Graf

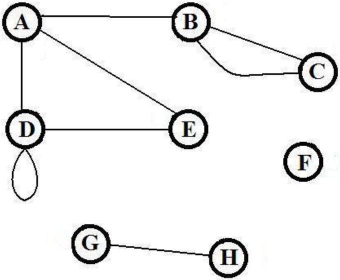
Grafem lub *grafem ogólnym* nazywamy parę $G = (V, E)$, gdzie:
1) V (czasem zapisywany $V(G)$) jest zbiorem *wierzchołków* (*węzłów*, *punktów*)
2) E (czasem zapisywany $E(G)$) jest rodziną *krawędzi* (które mogą się powtarzać), czyli jedno- i dwu-elementowych podzbiorów V.

Będziemy się zajmować głównie grafami *skończonymi* tj. o skończonej liczbie wierzchołków i krawędzi. Jeśli nie jest napisane inaczej, zakładamy, że graf w danej definicji lub twierdzeniu jest skończony. Do definicji pasują obydwa grafy z pierwszego slajdu. Kółka z literami to wierzchołki (litery w tym wypadku są *etykietami* czyli nazwami wierzchołków), a odcinki je łączące symbolizują krawędzie.

Przypomnienie przykładów

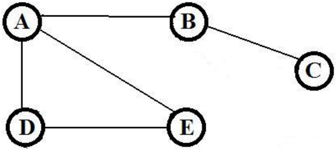


To oczywiście jest graf.

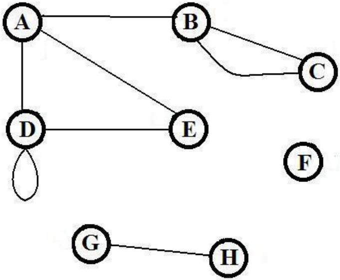


To też.

Przypomnienie przykładów



To oczywiście jest graf.



To też.

Ale graf po prawej jest ciut inny.

Doprecyzujmy parę pojęć...

Doprecyzujmy parę pojęć...

- Krawędź łączącą wierzchołki o nazwach u i v domyślnie zapisujemy jako uv (choć możemy zawsze jakoś nazwać krawędzie). Jako, że kierunek krawędzi nie jest wyróżniony vu oznacza to samo co uv (póki nie zajmujemy się grafami skierowanymi...).

Doprecyzujmy parę pojęć...

- Krawędź łączącą wierzchołki o nazwach u i v domyślnie zapisujemy jako uv (choć możemy zawsze jakoś nazwać krawędzie). Jako, że kierunek krawędzi nie jest wyróżniony vu oznacza to samo co uv (póki nie zajmujemy się grafami skierowanymi...).
- Jeśli taka krawędź istnieje, mówimy, że u i v są *sąsiadami*, a krawędź uv nazywamy *incydentną* z u i v.

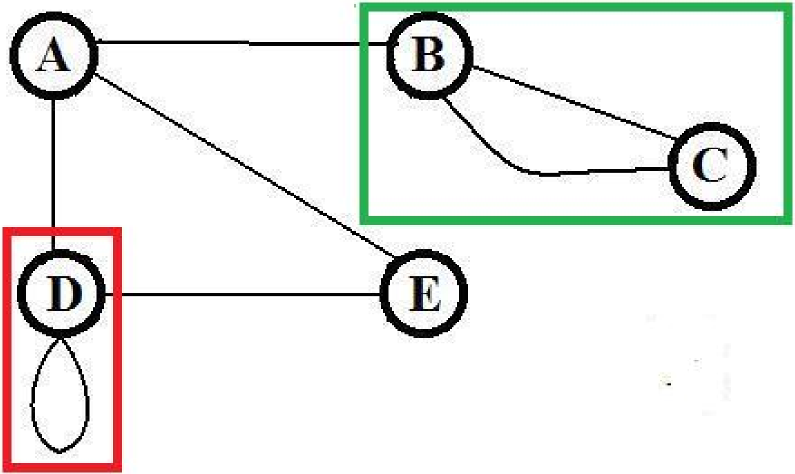
Doprecyzujmy parę pojęć...

- Krawędź łączącą wierzchołki o nazwach u i v domyślnie zapisujemy jako uv (choć możemy zawsze jakoś nazwać krawędzie). Jako, że kierunek krawędzi nie jest wyróżniony vu oznacza to samo co uv (póki nie zajmujemy się grafami skierowanymi...).
- Jeśli taka krawędź istnieje, mówimy, że u i v są *sąsiadami*, a krawędź uv nazywamy *incydentną* z u i v.
- Jeśli wierzchołki u i v łączy więcej niż jedna krawędź, to mówimy, że między nimi jest krawędź wielokrotna.

Doprecyzujmy parę pojęć...

- Krawędź łączącą wierzchołki o nazwach u i v domyślnie zapisujemy jako uv (choć możemy zawsze jakoś nazwać krawędzie). Jako, że kierunek krawędzi nie jest wyróżniony vu oznacza to samo co uv (póki nie zajmujemy się grafami skierowanymi...).
- Jeśli taka krawędź istnieje, mówimy, że u i v są *sąsiadami*, a krawędź uv nazywamy *incydentną* z u i v.
- Jeśli wierzchołki u i v łączy więcej niż jedna krawędź, to mówimy, że między nimi jest krawędź wielokrotna.
- Krawędź uv nazywamy *pętlą* jeśli $u = v$.

Pętla i krawędź wielokrotna



W zielonym prostokącie - krawędź wielokrotna, w czerwonym - pętla.

Definicja grafu

Graf prosty

Grafem prostym nazywamy parę $G = (V, E)$, gdzie:
1) V jest zbiorem *wierzchołków* (*węzłów*, *punktów*)
2) E jest zbiorem różnych krawędzi o różnych końcach.

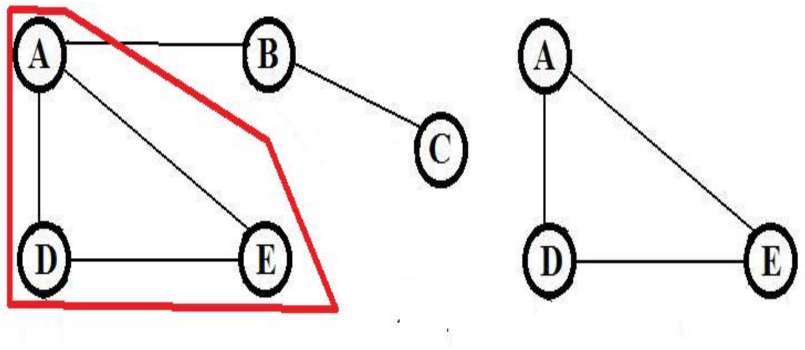
Definicja grafu

Graf prosty

Grafem prostym nazywamy parę $G = (V, E)$, gdzie:
1) V jest zbiorem *wierzchołków* (*węzłów*, *punktów*)
2) E jest zbiorem różnych krawędzi o różnych końcach.

Czyli graf prosty, to taki, w którym nie ma pętli i krawędzi wielokrotnych. Tylko jeden graf z pierwszego slajdu jest prosty. Na grafy, które nie są proste czasem mówi się *multigrafy* lub *pseudografy*.

Podgraf

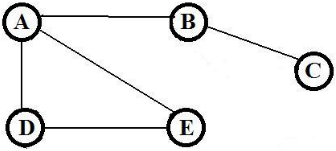


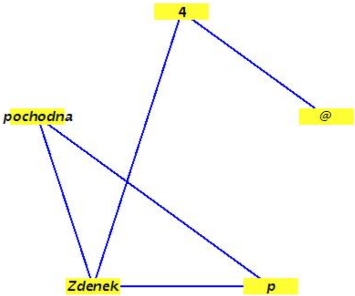
Graf po prawej jest podgrafem grafu po lewej.

Podgraf

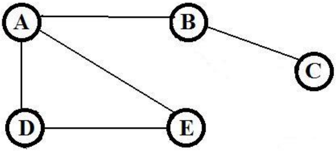
Graf H składający się tylko z wierzchołków i łączących je krawędzi należących do grafu G nazywamy *podgrafem* G.

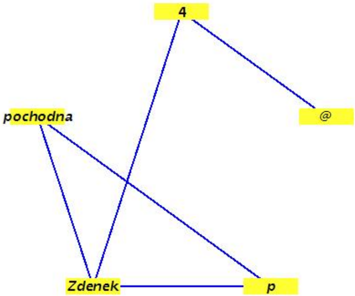
Grafy izomorficzne - przykład





Grafy izomorficzne - przykład





Zauważmy, że te dwa grafy (z matematycznego punktu widzenia) są takie same - różnią się tylko nazwami wierzchołków (A-Zdenek, B-4, C-@, D-pochodna, E-p) i sposobem narysowania. Ich struktura, czyli liczba wierzchołków i połączenia między nimi są te same.

Grafy izomorficzne - formalizacja

Grafy izomorficzne

Dwa grafy G i H nazywamy *izomorficznymi* jeśli istnieje bijekcja (czyli odwzorowanie „jeden do jednego") ψ między zbiorami $V(G)$ i $V(H)$ zachowująca sąsiedztwo wierzchołków, tzn. $uv \in E(G) \Rightarrow \psi(u)\psi(v) \in E(H)$. Fakt istnienia izomorfizmu grafów zapisujemy $G \simeq H$.

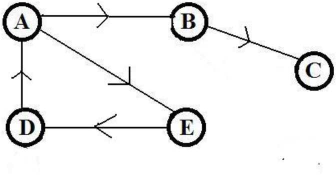
Grafy izomorficzne - formalizacja

Grafy izomorficzne

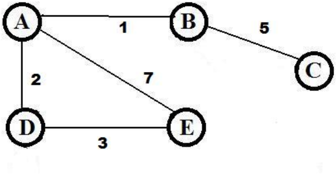
Dwa grafy G i H nazywamy *izomorficznymi* jeśli istnieje bijekcja (czyli odwzorowanie „jeden do jednego") ψ między zbiorami $V(G)$ i $V(H)$ zachowująca sąsiedztwo wierzchołków, tzn. $uv \in E(G) \Rightarrow \psi(u)\psi(v) \in E(H)$. Fakt istnienia izomorfizmu grafów zapisujemy $G \simeq H$.

W ramach tego kursu nie będziemy rozróżniać grafów izomorficznych (chyba, że do praktycznych zastosowań, gdzie konkretne nazwy wierzchołków lub sposób narysowania mogą być wygodniejsze). Zatem dla nas grafy izomorficzne są dla nas takie same.

Przypomnienie drugiego slajdu



Możemy chcieć zaznaczyć „jednokierunkowość” krawędzi.



Lub ich „długość”.

Takie grafy się przydają

Takie grafy się przydają

- Drogi jednokierunkowe (w miastach, w obwodach elektrycznych, w wodociągach).

Takie grafy się przydają

- Drogi jednokierunkowe (w miastach, w obwodach elektrycznych, w wodociągach).
- Drogi z czasami przejazdu.

Takie grafy się przydają

- Drogi jednokierunkowe (w miastach, w obwodach elektrycznych, w wodociągach).
- Drogi z czasami przejazdu.
- Kroki procedury z kosztem wykonania.

Takie grafy się przydają

- Drogi jednokierunkowe (w miastach, w obwodach elektrycznych, w wodociągach).
- Drogi z czasami przejazdu.
- Kroki procedury z kosztem wykonania.
- Łącza z przepustowościami.

Takie grafy się przydają

- Drogi jednokierunkowe (w miastach, w obwodach elektrycznych, w wodociągach).
- Drogi z czasami przejazdu.
- Kroki procedury z kosztem wykonania.
- Łącza z przepustowościami.
- Siła oddziaływań międzycząsteczkowych.

Takie grafy się przydają

- Drogi jednokierunkowe (w miastach, w obwodach elektrycznych, w wodociągach).
- Drogi z czasami przejazdu.
- Kroki procedury z kosztem wykonania.
- Łącza z przepustowościami.
- Siła oddziaływań międzycząsteczkowych.
- Wielkości przepływów ekonomicznych.

Takie grafy się przydają

- Drogi jednokierunkowe (w miastach, w obwodach elektrycznych, w wodociągach).
- Drogi z czasami przejazdu.
- Kroki procedury z kosztem wykonania.
- Łącza z przepustowościami.
- Siła oddziaływań międzycząsteczkowych.
- Wielkości przepływów ekonomicznych.
- Prawdopodobieństwo przejścia z jednego stanu do innego (np. Google Page Rank).

A co z grafami z drugiego slajdu?

Grafy skierowane

Grafem skierowanym lub *digrafem* nazywamy parę $G = (V, E)$, gdzie:
1) V jest zbiorem *wierzchołków* (*węzłów*, *punktów*)
2) E jest rodziną krawędzi skierowanych (które mogą się powtarzać), czyli elementów $V \times V$.

A co z grafami z drugiego slajdu?

Grafy skierowane

Grafem skierowanym lub *digrafem* nazywamy parę $G = (V, E)$, gdzie:
1) V jest zbiorem *wierzchołków* (*węzłów*, *punktów*)
2) E jest rodziną krawędzi skierowanych (które mogą się powtarzać), czyli elementów $V \times V$.

Krawędzie skierowane na rysunkach grafów przedstawiamy jako strzałki, a krawędzie takiego grafu domyślnie zapisujemy jako pary uporządkowane np. (u, v).
Jeśli któraś krawędź w takim grafie nie ma zaznaczonej strzałki, zakłada się, że ma strzałki w obie strony (droga dwukierunkowa jako domyślna).

A co z grafami z drugiego slajdu?

Grafy z wagami

Grafem z wagami nazywamy graf (skierowany lub nie), w którym każdej krawędzi e przypisana jest nieujemna liczba $W(e)$. *Wagą grafu* nazywamy sumę wag jego krawędzi.

A co z grafami z drugiego slajdu?

Grafy z wagami

Grafem z wagami nazywamy graf (skierowany lub nie), w którym każdej krawędzi e przypisana jest nieujemna liczba $W(e)$. *Wagą grafu* nazywamy sumę wag jego krawędzi.

Graf z wagami może być skierowany lub nie. Wagi zazwyczaj zapisuje się jako liczby przy krawędziach.

A co z grafami z drugiego slajdu?

Grafy z wagami

Grafem z wagami nazywamy graf (skierowany lub nie), w którym każdej krawędzi e przypisana jest nieujemna liczba $W(e)$. *Wagą grafu* nazywamy sumę wag jego krawędzi.

Graf z wagami może być skierowany lub nie. Wagi zazwyczaj zapisuje się jako liczby przy krawędziach.
Waga grafu z prawej strony drugiego slajdu wynosi 18.

Stopień - charakterystyka wierzchołka

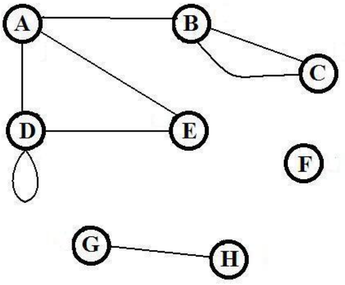
Stopień wierzchołka

Stopniem wierzchołka v nazywamy liczbę $\deg v$, oznaczającą liczbę krawędzi incydentnych z v (uwaga: w obliczaniu stopnia wierzchołka pętle liczymy jako dwie krawędzie incydentne).

Stopień - charakterystyka wierzchołka

Stopień wierzchołka

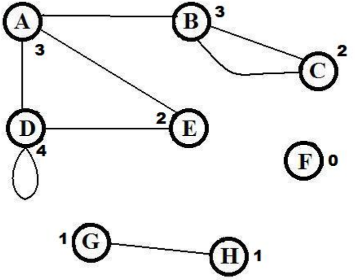
Stopniem wierzchołka v nazywamy liczbę $\deg v$, oznaczającą liczbę krawędzi incydentnych z v (uwaga: w obliczaniu stopnia wierzchołka pętle liczymy jako dwie krawędzie incydentne).



Stopień - charakterystyka wierzchołka

Stopień wierzchołka

Stopniem wierzchołka v nazywamy liczbę deg v, oznaczającą liczbę krawędzi incydentnych z v (uwaga: w obliczaniu stopnia wierzchołka pętle liczymy jako dwie krawędzie incydentne).



Przy każdym wierzchołku zapisano jego stopień. Np. deg $A = 3$. Zauważmy, że deg $D = 4$, bo pętlę liczymy dwa razy.

Twierdzenie (lemat o uściskach dłoni)

Lemat o uściskach dłoni

Jeśli $G = (V, E)$ jest grafem ogólnym, to:

$$\sum_{v \in V} \deg v = 2|E|.$$

Zatem liczba wierzchołków stopnia nieparzystego jest parzysta.

Twierdzenie (lemat o uściskach dłoni)

Lemat o uściskach dłoni

Jeśli $G = (V, E)$ jest grafem ogólnym, to:

$$\sum_{v \in V} \deg v = 2|E|.$$

Zatem liczba wierzchołków stopnia nieparzystego jest parzysta.

Z tego twierdzenia wynika, że niezależnie ile dłoni mają wszystkie gatunki wszechświata i ile z nich wymienia między sobą uściski dłoni, to jeśli zsumujemy uściski dłoni wykonane przez każdą osobę we wszechświecie, liczba ich zawsze będzie parzysta (wystarczy każdą osobę potraktować jako wierzchołek grafu, a każdy uścisk jako krawędź między wierzchołkami).

Droga i jej długość

Droga

Droga w grafie G to skończony ciąg krawędzi postaci: $wv_1, v_1v_2, \ldots, v_ku$ (czyli drugi wierzchołek poprzedniej krawędzi musi być pierwszym następnej). Oznaczamy go $wv_1 \ldots v_ku$. Wierzchołek w nazywamy początkiem, a u - końcem drogi.
W wypadku grafu skierowanego, droga jest zdefiniowana tak samo, ale kolejne krawędzie drogi muszą mieć kierunek zgodny z kierunkiem krawędzi w grafie.

Droga i jej długość

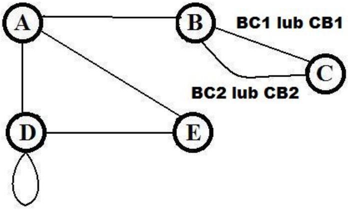
Droga

Droga w grafie G to skończony ciąg krawędzi postaci: $wv_1, v_1v_2, \ldots, v_ku$ (czyli drugi wierzchołek poprzedniej krawędzi musi być pierwszym następnej). Oznaczamy go $wv_1 \ldots v_ku$. Wierzchołek w nazywamy początkiem, a u - końcem drogi.
W wypadku grafu skierowanego, droga jest zdefiniowana tak samo, ale kolejne krawędzie drogi muszą mieć kierunek zgodny z kierunkiem krawędzi w grafie.

Długość drogi

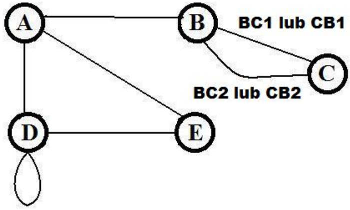
Długość drogi to liczba jej krawędzi.

Drogi - przykłady



Na potrzeby przykładu rozróżniamy dwie krawędzie łączące wierzchołki B i C.

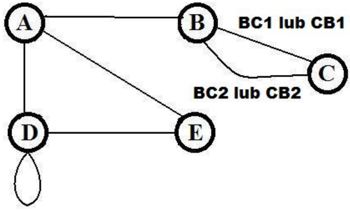
Drogi - przykłady



- Ciąg krawędzi AB, $BC1$, $CB1$, $BC2$, $CB1$ BA, AE jest drogą, podobnie jak AD, DD, DE, ED.

Na potrzeby przykładu rozróżniamy dwie krawędzie łączące wierzchołki B i C.

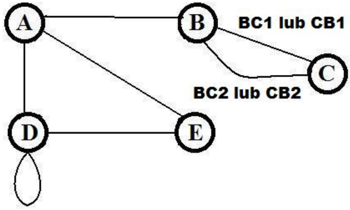
Drogi - przykłady



Na potrzeby przykładu rozróżniamy dwie krawędzie łączące wierzchołki B i C.

- Ciąg krawędzi $AB, BC1, CB1, BC2, CB1$ BA, AE jest drogą, podobnie jak AD, DD, DE, ED.
- W skrócie można te drogi zapisać odpowiednio: $ABCBCBAE$ (choć tracimy tu informację o tym, jakimi krawędziami poruszaliśmy się między B i C) oraz $ADDED$

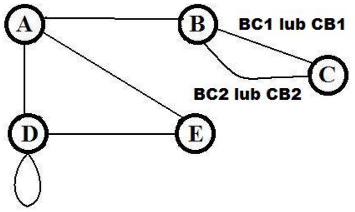
Drogi - przykłady



Na potrzeby przykładu rozróżniamy dwie krawędzie łączące wierzchołki B i C.

- Ciąg krawędzi $AB, BC1, CB1, BC2, CB1$ BA, AE jest drogą, podobnie jak AD, DD, DE, ED.
- W skrócie można te drogi zapisać odpowiednio: $ABCBCBAE$ (choć tracimy tu informację o tym, jakimi krawędziami poruszaliśmy się między B i C) oraz $ADDED$
- Długości tych dróg to odpowiednio 7 i 4.

Drogi - przykłady



Ciąg krawędzi AB, DA, AE nie jest drogą, bo druga krawędź nie zaczyna się tam, gdzie kończy pierwsza.

Na potrzeby przykładu rozróżniamy dwie krawędzie łączące wierzchołki B i C.

Własności dróg

Droga zamknięta

Droga zamknięta to droga dla której $w = u$, czyli wierzchołek początkowy jest też wierzchołkiem końcowym.

Własności dróg

Droga zamknięta

Droga zamknięta to droga dla której $w = u$, czyli wierzchołek początkowy jest też wierzchołkiem końcowym.

Droga prosta

Droga prosta, to droga, której wszystkie krawędzie są różne (nie można nawet przejść jedną krawędzią w przeciwne strony).

Własności dróg

Droga zamknięta

Droga zamknięta to droga dla której $w = u$, czyli wierzchołek początkowy jest też wierzchołkiem końcowym.

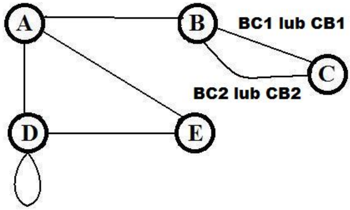
Droga prosta

Droga prosta, to droga, której wszystkie krawędzie są różne (nie można nawet przejść jedną krawędzią w przeciwne strony).

Cykl

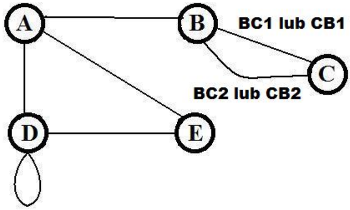
Cykl to droga prosta zamknięta, w której jedynym powtarzającym się wierzchołkiem jest jej początek (i jednocześnie koniec).

Drogi - własności



Na potrzeby przykładu rozróżniamy dwie krawędzie łączące wierzchołki B i C.

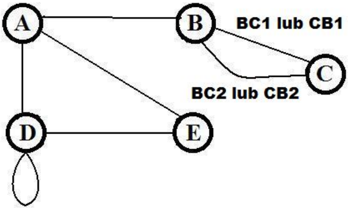
Drogi - własności



Na potrzeby przykładu rozróżniamy dwie krawędzie łączące wierzchołki B i C.

- Ciąg krawędzi *ED*, *DD*, *DE* jest drogą zamkniętą, ale nie drogą prostą ani cyklem.

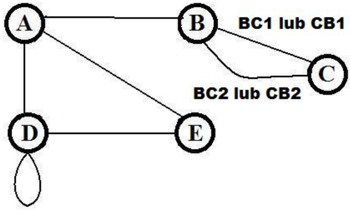
Drogi - własności



Na potrzeby przykładu rozróżniamy dwie krawędzie łączące wierzchołki B i C.

- Ciąg krawędzi ED, DD, DE jest drogą zamkniętą, ale nie drogą prostą ani cyklem.
- Ciąg krawędzi AD, DD, DE, EA jest drogą prostą i zamkniętą ale nie cyklem (D się powtarza).

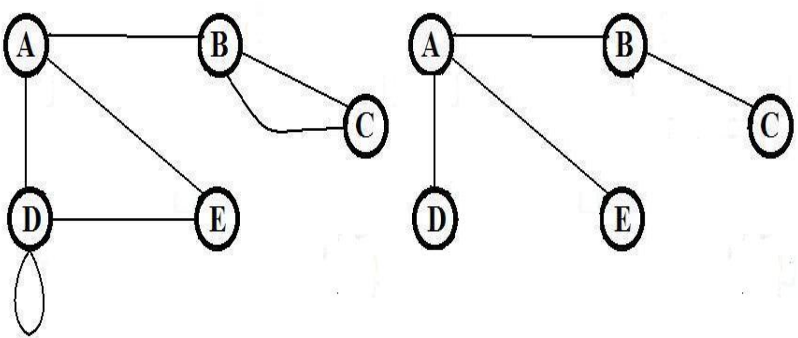
Drogi - własności



Na potrzeby przykładu rozróżniamy dwie krawędzie łączące wierzchołki B i C.

- Ciąg krawędzi ED, DD, DE jest drogą zamkniętą, ale nie drogą prostą ani cyklem.
- Ciąg krawędzi AD, DD, DE, EA jest drogą prostą i zamkniętą ale nie cyklem (D się powtarza).
- Ciągi krawędzi (EA, AD, DE) i $(BC1, CB2)$ są cyklami.

Graf acykliczny



Graf po prawej jest acykliczny, graf po lewej nie.

Graf acykliczny

Graf acykliczny to graf, który nie zawiera cykli.

Spójność - definicje

Graf spójny

Graf spójny to graf, w którym między dowolnymi dwoma wierzchołkami istnieje droga. Jeśli graf nie jest spójny, to nazywamy go *niespójnym*.

Spójność - definicje

Graf spójny

Graf spójny to graf, w którym między dowolnymi dwoma wierzchołkami istnieje droga. Jeśli graf nie jest spójny, to nazywamy go *niespójnym*.

Uwaga! Graf spójny o $|V|$ wierzchołkach musi mieć przynajmniej $|V| - 1$ krawędzi.

Spójność - definicje

Graf spójny

Graf spójny to graf, w którym między dowolnymi dwoma wierzchołkami istnieje droga. Jeśli graf nie jest spójny, to nazywamy go *niespójnym*.

Uwaga! Graf spójny o $|V|$ wierzchołkach musi mieć przynajmniej $|V| - 1$ krawędzi.

Składowe spójne

Każdy graf można podzielić na maksymalne (w sensie zawierania) spójne podgrafy, zwane *składowymi spójnymi*.

Spójność - definicje

Graf spójny

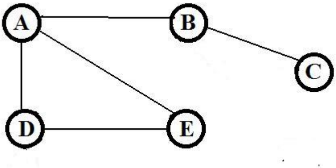
Graf spójny to graf, w którym między dowolnymi dwoma wierzchołkami istnieje droga. Jeśli graf nie jest spójny, to nazywamy go *niespójnym*.

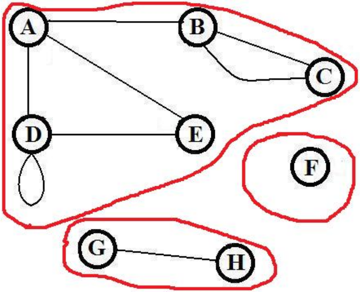
Uwaga! Graf spójny o $|V|$ wierzchołkach musi mieć przynajmniej $|V|-1$ krawędzi.

Składowe spójne

Każdy graf można podzielić na maksymalne (w sensie zawierania) spójne podgrafy, zwane *składowymi spójnymi*.

Spójność, składowe spójne





Graf po lewej jest spójny, graf po prawej ma 3 (zaznaczone) składowe spójne.

Rozspójnianie - definicje

Most

Most to taka krawędź grafu, po której usunięciu liczba składowych spójnych zwiększa się o 1.

Rozspójnianie - definicje

Most

Most to taka krawędź grafu, po której usunięciu liczba składowych spójnych zwiększa się o 1.

Wierzchołek rozspajający

Wierzchołkiem rozspajającym (punktem artykulacji, przegubem) w grafie G nazywamy wierzchołek, którego usunięcie, wraz z jego krawędziami incydentnymi, spowoduje wzrost liczby składowych spójnych (niekoniecznie o 1).

Rozspójnianie - definicje

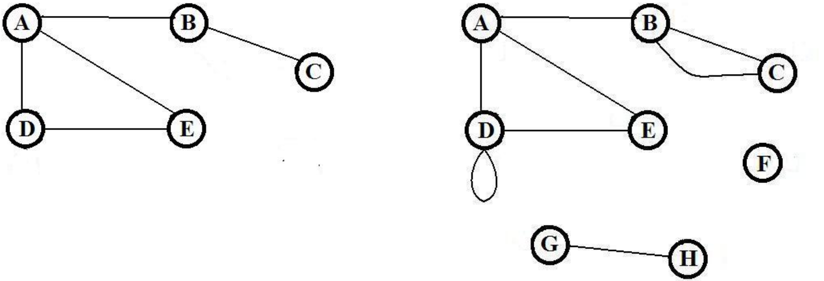
Most

Most to taka krawędź grafu, po której usunięciu liczba składowych spójnych zwiększa się o 1.

Wierzchołek rozspajający

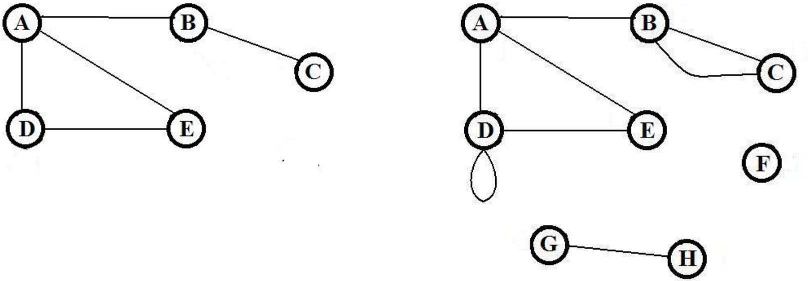
Wierzchołkiem rozspajającym (punktem artykulacji, przegubem) w grafie G nazywamy wierzchołek, którego usunięcie, wraz z jego krawędziami incydentnymi, spowoduje wzrost liczby składowych spójnych (niekoniecznie o 1).

Mosty i przeguby



W grafie po lewej krawędzie AB i BC, a w grafie po prawej AB i GH są mostami: ich usunięcie spowoduje „rozspójnienie" grafu.

Mosty i przeguby



W grafie po lewej krawędzie AB i BC, a w grafie po prawej AB i GH są mostami: ich usunięcie spowoduje „rozspójnienie” grafu. Wierzchołkami rozspajającymi są w obydwu grafach są jedynie A i B.

Grafy spójne i niespójne - przykłady zastosowań

Warto zdać sobie sprawę, że znaczna część problemów, do których stosowana jest teoria grafów generuje grafy niespójne (aczkolwiek zazwyczaj najciekawsze rzeczy dzieją się na największej składowej spójnej i często do niej ogranicza się badania, czy działanie algorytmu).

Grafy spójne i niespójne - przykłady zastosowań

Warto zdać sobie sprawę, że znaczna część problemów, do których stosowana jest teoria grafów generuje grafy niespójne (aczkolwiek zazwyczaj najciekawsze rzeczy dzieją się na największej składowej spójnej i często do niej ogranicza się badania, czy działanie algorytmu).

- Sieć i komputery do niej niepodłączone

Grafy spójne i niespójne - przykłady zastosowań

Warto zdać sobie sprawę, że znaczna część problemów, do których stosowana jest teoria grafów generuje grafy niespójne (aczkolwiek zazwyczaj najciekawsze rzeczy dzieją się na największej składowej spójnej i często do niej ogranicza się badania, czy działanie algorytmu).

- Sieć i komputery do niej niepodłączone
- Sieci społeczne i samotnicy lub izolowane społeczności

Grafy spójne i niespójne - przykłady zastosowań

Warto zdać sobie sprawę, że znaczna część problemów, do których stosowana jest teoria grafów generuje grafy niespójne (aczkolwiek zazwyczaj najciekawsze rzeczy dzieją się na największej składowej spójnej i często do niej ogranicza się badania, czy działanie algorytmu).

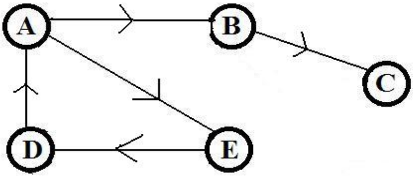
- Sieć i komputery do niej niepodłączone
- Sieci społeczne i samotnicy lub izolowane społeczności
- Niepodłączone elementy układów elektrycznych

Grafy spójne i niespójne - przykłady zastosowań

Warto zdać sobie sprawę, że znaczna część problemów, do których stosowana jest teoria grafów generuje grafy niespójne (aczkolwiek zazwyczaj najciekawsze rzeczy dzieją się na największej składowej spójnej i często do niej ogranicza się badania, czy działanie algorytmu).

- Sieć i komputery do niej niepodłączone
- Sieci społeczne i samotnicy lub izolowane społeczności
- Niepodłączone elementy układów elektrycznych
- Niewykorzystywane zasoby lub metody w algorytmie rozwiązywania jakiegoś problemu.

Uwaga - spójność i grafy skierowane



Definiowanie spójności dla grafów skierowanych jest bardziej skomplikowane. Na przykład z wierzchołka A istnieje droga do C, ale nie ma drogi powrotnej. Istnieją precyzyjne definicje różnych rodzajów spójności dla grafów skierowanych, jednak na potrzeby naszego wykładu uznajemy, że graf skierowany jest spójny wtedy i tylko wtedy gdy spójny jest jego *graf podstawowy* (czyli ten sam graf, bez kierunków na krawędziach). W tym sensie graf powyższy jest spójny.

Lasy i drzewa

Las

Las to graf prosty, acykliczny.

Lasy i drzewa

Las

Las to graf prosty, acykliczny.

Drzewo

Drzewo to graf prosty, spójny, acykliczny (czyli spójny las). Wierzchołki drzewa nazywamy *węzłami*. Podgraf spójny drzewa nazywamy *poddrzewem*.

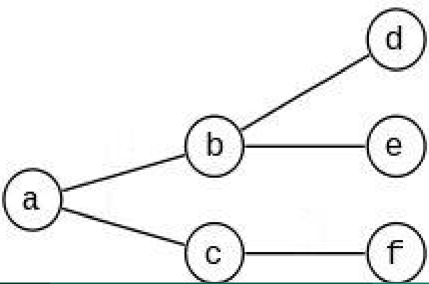
Lasy i drzewa

Las

Las to graf prosty, acykliczny.

Drzewo

Drzewo to graf prosty, spójny, acykliczny (czyli spójny las). Wierzchołki drzewa nazywamy *węzłami*. Podgraf spójny drzewa nazywamy *poddrzewem*.



Antyklika i klika

Antyklika

Graf pusty (*antyklika, graf niezależny*) to graf bez krawędzi. Antyklikę o n wierzchołkach oznacza się przez A_n.

Antyklika i klika

Antyklika

Graf pusty (*antyklika*, *graf niezależny*) to graf bez krawędzi. Antyklikę o n wierzchołkach oznacza się przez A_n.

Klika

Graf pełny (*klika*) to graf prosty, w którym każde dwa wierzchołki są połączone dokładnie jedną krawędzią. Klikę o n wierzchołkach oznacza się przez K_n.

Antyklika i klika

Antyklika

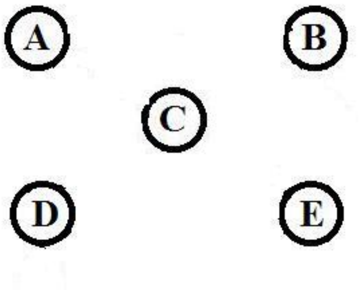
Graf pusty (*antyklika*, *graf niezależny*) to graf bez krawędzi. Antyklikę o n wierzchołkach oznacza się przez A_n.

Klika

Graf pełny (*klika*) to graf prosty, w którym każde dwa wierzchołki są połączone dokładnie jedną krawędzią. Klikę o n wierzchołkach oznacza się przez K_n.

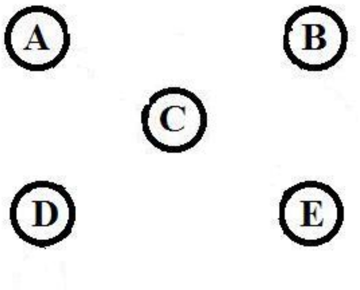
Korzystając z wiadomości z kombinatoryki, łatwo obliczyć, ile krawędzi ma klika o danej liczbie wierzchołków...

Klika i antyklika

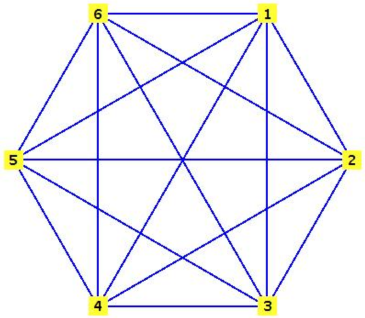


5-antyklika (A_5).

Klika i antyklika



5-antyklika (A_5).



6-klika (K_6)

Graf-droga i graf-cykl

Graf-droga

Graf-droga to graf złożony tylko z krawędzi $v_1 v_2, v_2 v_3, \ldots, v_{n-1} v_n$ (czyli drugi wierzchołek poprzedniej krawędzi musi być pierwszym następnej), gdzie wszystkie wierzchołki v_i są różne.

Graf-droga i graf-cykl

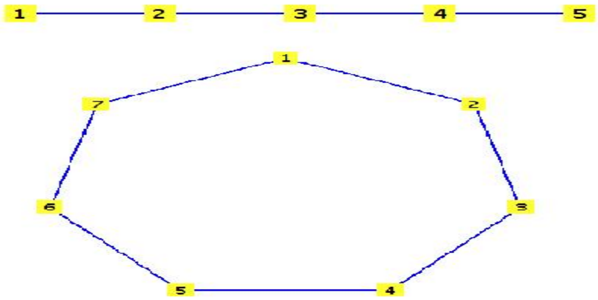
Graf-droga

Graf-droga to graf złożony tylko z krawędzi $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n$ (czyli drugi wierzchołek poprzedniej krawędzi musi być pierwszym następnej), gdzie wszystkie wierzchołki v_i są różne.

Graf-cykl

Graf-cykl to graf złożony tylko z krawędzi $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n, v_nv_1$ (czyli drugi wierzchołek poprzedniej krawędzi musi być pierwszym następnej), gdzie wszystkie wierzchołki v_i są różne, z wyjątkiem pierwszego i ostatniego.

Graf-droga i graf-cykl

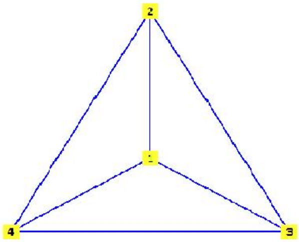


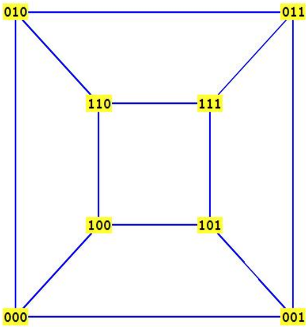
Na górze graf-droga o 5 wierzchołkach, na dole graf-cykl o 7 wierzchołkach.

Grafy platońskie

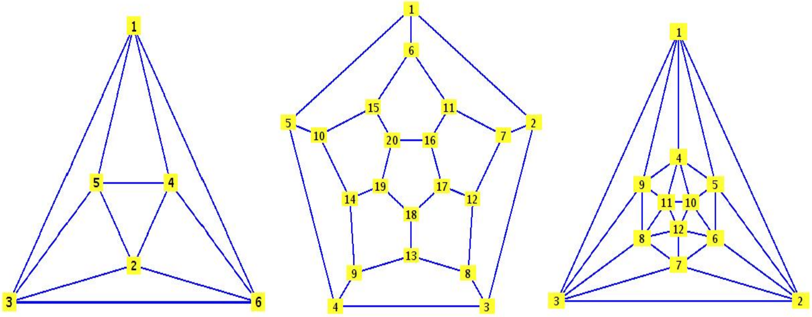
Graf platoński

Graf platoński to graf złożony z wierzchołków i krawędzi wielościanu foremnego. Jest pięć takich grafów (jak i pięć wielościanów foremnych): czworościan, sześcian, ośmiościan, dwunastościan i dwudziestościan.





Grafy platońskie



Na poprzednim slajdzie - zrzutowane na płaszczyznę grafy czworościonu i sześcianu, na tym grafy ośmiościanu, dwunastościanu i dwudziestościanu.

Graf Petersena

Innym bardziej wyrafinowanym grafem o ciekawych własnościach jest graf Petersena: