5d. Grafy dwudzielne i kolorowania

Grzegorz Kosiorowski

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

Graf dwudzielny

W tym rozdziale będziemy się zajmować tylko grafami spójnymi, nieskierowanymi i bez wag (choć poszczególne pojęcia można uogólnić na wszystkie grafy, jednak te uogólnienia nie niosą ze sobą nic szczególnie ciekawego).

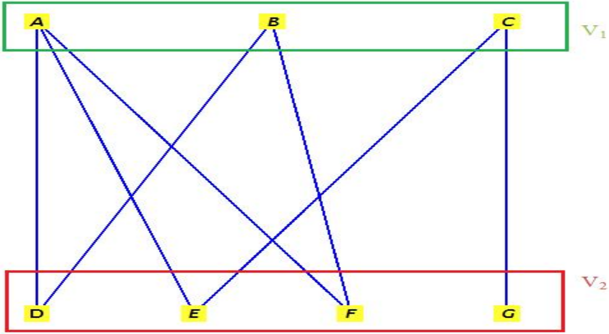
Graf dwudzielny

W tym rozdziale będziemy się zajmować tylko grafami spójnymi, nieskierowanymi i bez wag (choć poszczególne pojęcia można uogólnić na wszystkie grafy, jednak te uogólnienia nie niosą ze sobą nic szczególnie ciekawego).

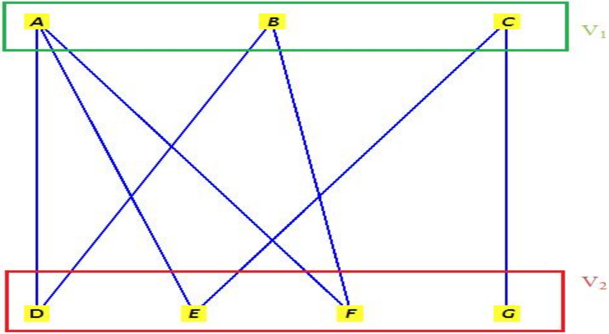
Graf dwudzielny

Graf dwudzielny to graf $G = (V, E)$, w którym zbiór wierzchołków V da się podzielić na dwa rozłączne podzbiory V_1 oraz V_2 tak, by żadne dwa wierzchołki w obrębie tego samego podzbioru V_i nie były sąsiadami (czyli V_1 i V_2 są antyklikami). Dla podkreślenia takiego podziału, graf dwudzielny będziemy oznaczać przez $(V_1 \cup V_2, E)$.

Graf dwudzielny - przykład



Graf dwudzielny - przykład



Zazwyczaj jeśli chcemy podkreślić, że jakiś graf jest dwudzielny, rysujemy zbiór V_1 na górze, a V_2 na dole (albo V_1 po lewej, a V_2 po prawej).

Sprawdzanie dwudzielności

Dwudzielność i cykle

Graf jest dwudzielny wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jego cykl ma parzystą długość.

Sprawdzanie dwudzielności

Dwudzielność i cykle

Graf jest dwudzielny wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jego cykl ma parzystą długość.

Uzasadnienie: skoro cykl musi się kończyć w tej samej grupie (V_1 lub V_2), w której się zaczynał, a w każda jego krawędź przechodzi pomiędzy tymi grupami to musi mieć parzystą liczbę krawędzi.

Sprawdzanie dwudzielności

Dwudzielność i cykle

Graf jest dwudzielny wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jego cykl ma parzystą długość.

Uzasadnienie: skoro cykl musi się kończyć w tej samej grupie (V_1 lub V_2), w której się zaczynał, a w każda jego krawędź przechodzi pomiędzy tymi grupami to musi mieć parzystą liczbę krawędzi.

Wniosek

Graf zawierający 3-klikę nigdy nie jest dwudzielny.

Grafy dwudzielne - przykłady

Grafy dwudzielne - przykłady

- Antykliki są dwudzielne, a kliki K_n dla $n \geqslant 3$ nie są.

Grafy dwudzielne - przykłady

- Antykliki są dwudzielne, a kliki K_n dla $n \geqslant 3$ nie są.
- Grafy-drogi są dwudzielne (bo nie mają cykli), a grafy-cykle są dwudzielne wtedy i tylko wtedy, gdy mają parzystą liczbę wierzchołków.

Grafy dwudzielne - przykłady

- Antykliki są dwudzielne, a kliki K_n dla $n \geqslant 3$ nie są.
- Grafy-drogi są dwudzielne (bo nie mają cykli), a grafy-cykle są dwudzielne wtedy i tylko wtedy, gdy mają parzystą liczbę wierzchołków.
- Drzewa są dwudzielne (bo nie mają cykli).

Grafy dwudzielne - przykłady

- Antykliki są dwudzielne, a kliki K_n dla $n \geqslant 3$ nie są.
- Grafy-drogi są dwudzielne (bo nie mają cykli), a grafy-cykle są dwudzielne wtedy i tylko wtedy, gdy mają parzystą liczbę wierzchołków.
- Drzewa są dwudzielne (bo nie mają cykli).
- Z grafów platońskich tylko graf sześcianu jest dwudzielny.

Grafy dwudzielne - przykłady

- Antykliki są dwudzielne, a kliki K_n dla $n \geqslant 3$ nie są.
- Grafy-drogi są dwudzielne (bo nie mają cykli), a grafy-cykle są dwudzielne wtedy i tylko wtedy, gdy mają parzystą liczbę wierzchołków.
- Drzewa są dwudzielne (bo nie mają cykli).
- Z grafów platońskich tylko graf sześcianu jest dwudzielny.
- Graf Petersena nie jest dwudzielny, choć nie zawiera 3-kliki (podobnie jak graf dwunastościanu).

Grafy dwudzielny pełny

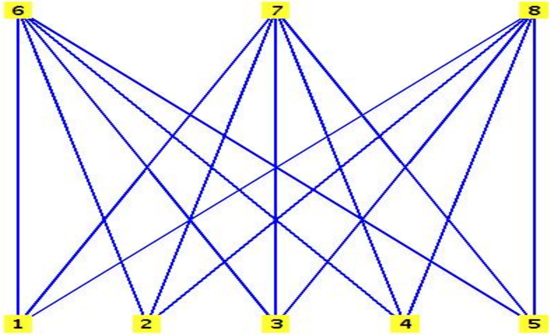
Pełny graf dwudzielny

Jeśli w grafie dwudzielnym $\mathbf{G} = (V_1 \cup V_2, E)$ pomiędzy wszystkimi parami wierzchołków należących do różnych zbiorów (V_1, V_2) istnieje krawędź, graf taki nazywamy *pełnym grafem dwudzielnym* lub kliką dwudzielną i oznaczamy $K_{n,m}$ gdzie $|V_1| = n$ i $|V_2| = m$.

Grafy dwudzielny pełny

Pełny graf dwudzielny

Jeśli w grafie dwudzielnym $\mathbf{G} = (V_1 \cup V_2, E)$ pomiędzy wszystkimi parami wierzchołków należących do różnych zbiorów (V_1, V_2) istnieje krawędź, graf taki nazywamy *pełnym grafem dwudzielnym* lub kliką dwudzielną i oznaczamy $K_{n,m}$ gdzie $|V_1| = n$ i $|V_2| = m$.



$K_{3,5}$

Grafy dwudzielne - zastosowania

Grafy dwudzielne pozwalają modelować zjawiska, w których mamy do czynienia z obiektami dwóch typów. Najczęściej chodzi o to, by badać możliwe połączenia pomiędzy dwoma typami obiektów.

Grafy dwudzielne - zastosowania

Grafy dwudzielne pozwalają modelować zjawiska, w których mamy do czynienia z obiektami dwóch typów. Najczęściej chodzi o to, by badać możliwe połączenia pomiędzy dwoma typami obiektów.

- Zbiór klientów biura matrymonialnego/portalu randkowego deklarujących heteroseksualność. Wierzchołkami grafu będą wtedy kobiety (V_1) i mężczyźni (V_2). Krawędź między dwoma wierzchołkami istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy osoby te spełniają nawzajem swoje oczekiwania (jeśli chodzi o wybór „pary"). Oczywiście, nie ma krawędzi pomiędzy wierzchołkami tej samej grupy (z założenia o heteroseksualności).

Grafy dwudzielne - zastosowania

- W klinice transplantologicznej jako graf dwudzielny można zinterpretować zbiór dostępnych do transplantacji organów (V_1) i zbiór pacjentów, którzy oczekują na przeszczep (V_2). Połączenia między wierzchołkami z tych grup występują, gdy dany organ kwalifikuje się do przeszczepienia dla danego pacjenta z odpowiednio małym ryzykiem odrzucenia.

Grafy dwudzielne - zastosowania

- W klinice transplantologicznej jako graf dwudzielny można zinterpretować zbiór dostępnych do transplantacji organów (V_1) i zbiór pacjentów, którzy oczekują na przeszczep (V_2). Połączenia między wierzchołkami z tych grup występują, gdy dany organ kwalifikuje się do przeszczepienia dla danego pacjenta z odpowiednio małym ryzykiem odrzucenia.
- Na uczelni, jedną grupą wierzchołków mogą być pracownicy dydaktyczni, a drugą - zajęcia, które trzeba poprowadzić. Połączenia między wierzchołkami z tych grup występują, gdy dane zajęcia mogą być prowadzone przez danego pracownika.

Grafy dwudzielne - zastosowania

- W klinice transplantologicznej jako graf dwudzielny można zinterpretować zbiór dostępnych do transplantacji organów (V_1) i zbiór pacjentów, którzy oczekują na przeszczep (V_2). Połączenia między wierzchołkami z tych grup występują, gdy dany organ kwalifikuje się do przeszczepienia dla danego pacjenta z odpowiednio małym ryzykiem odrzucenia.
- Na uczelni, jedną grupą wierzchołków mogą być pracownicy dydaktyczni, a drugą - zajęcia, które trzeba poprowadzić. Połączenia między wierzchołkami z tych grup występują, gdy dane zajęcia mogą być prowadzone przez danego pracownika.

Ostatnim przykładem szczegółowo zajmiemy się później, ale dwa pierwsze sugerują nam typowe zagadnienie związane z grafem dwudzielnym: znalezienie tzw. pełnego skojarzenia, czyli „znalezienia pary" dla każdego wierzchołka z grupy pierwszej w grupie drugiej.

Skojarzenia

Skojarzenie

Skojarzenie w grafie dwudzielnym $\mathbf{G} = (V_1 \cup V_2, E)$ to podzbiór krawędzi $M \subset E(G)$, w którym żadne dwie $v_1v_2, u_1u_2 \in M$ nie wychodzą z tego samego wierzchołka (czyli M to zbiór rozłącznych par elementów połączonych krawędziami).

Skojarzenia

Skojarzenie

Skojarzenie w grafie dwudzielnym $\mathbf{G} = (V_1 \cup V_2, E)$ to podzbiór krawędzi $M \subset E(G)$, w którym żadne dwie $v_1 v_2, u_1 u_2 \in M$ nie wychodzą z tego samego wierzchołka (czyli M to zbiór rozłącznych par elementów połączonych krawędziami).

Wierzchołek skojarzony

Mówimy, że $v \in V_i$ jest *skojarzony*, jeśli istnieje $w \in V_{3-i}$ taki, że krawędź vw należy do skojarzenia.

Skojarzenia

Skojarzenie

Skojarzenie w grafie dwudzielnym $\mathbf{G} = (V_1 \cup V_2, E)$ to podzbiór krawędzi $M \subset E(G)$, w którym żadne dwie $v_1 v_2, u_1 u_2 \in M$ nie wychodzą z tego samego wierzchołka (czyli M to zbiór rozłącznych par elementów połączonych krawędziami).

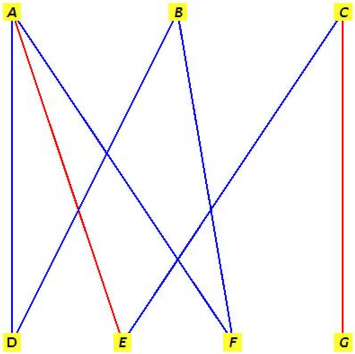
Wierzchołek skojarzony

Mówimy, że $v \in V_i$ jest *skojarzony*, jeśli istnieje $w \in V_{3-i}$ taki, że krawędź vw należy do skojarzenia.

Skojarzenie pełne

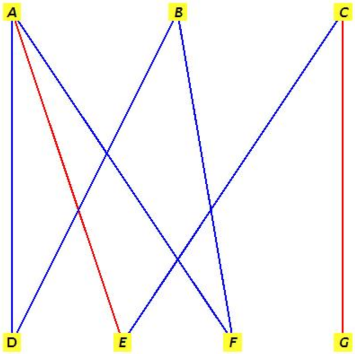
Pełne skojarzenie w grafie dwudzielnym $\mathbf{G} = (V_1 \cup V_2, E)$ to skojarzenie, w którym każdy wierzchołek z V_1 jest skojarzony.

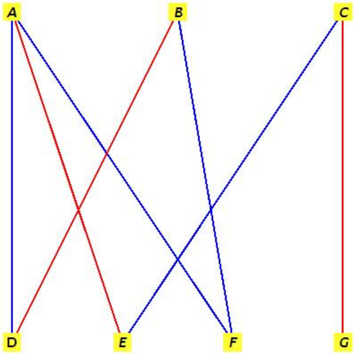
Skojarzenia - przykład



Czerwone krawędzie tworzą skojarzenie, ale nie pełne.

Skojarzenia - przykład





Czerwone krawędzie tworzą skojarzenie, ale nie pełne.

Czerwone krawędzie tworzą skojarzenie pełne.

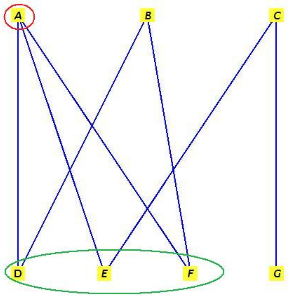
Twierdzenie Halla - funkcja Φ

Twierdzenie Halla - funkcja Φ

Funkcja Φ każdemu zbiorowi $A \subset V_1$ przyporządkowuje zbiór tych wierzchołków V_2, które są sąsiednie z przynajmniej jednym wierzchołkiem w A.

Twierdzenie Halla - funkcja Φ

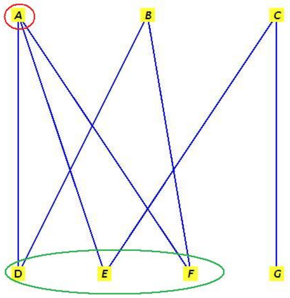
Funkcja Φ każdemu zbiorowi $A \subset V_1$ przyporządkowuje zbiór tych wierzchołków V_2, które są sąsiednie z przynajmniej jednym wierzchołkiem w A.

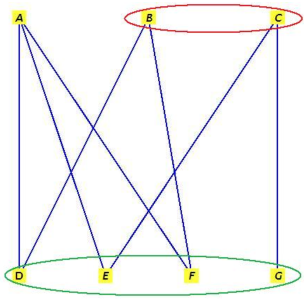


$$\Phi(\{A\}) = \{D, E, F\}.$$

Twierdzenie Halla - funkcja Φ

Funkcja Φ każdemu zbiorowi $A \subset V_1$ przyporządkowuje zbiór tych wierzchołków V_2, które są sąsiednie z przynajmniej jednym wierzchołkiem w A.





$\Phi(\{A\}) = \{D, E, F\}$.

$\Phi(\{B, C\}) = \{D, E, F, G\}$.

Twierdzenie Halla

Twierdzenie Halla

Niech $\mathbf{G} = (V_1 \cup V_2, E)$ będzie grafem dwudzielnym. Wówczas pełne skojarzenie w G istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $|X| \leqslant |\Phi(X)|$ dla każdego podzbioru X zbioru V_1.

Twierdzenie Halla

Niech $\mathbf{G} = (V_1 \cup V_2, E)$ będzie grafem dwudzielnym. Wówczas pełne skojarzenie w G istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $|X| \leqslant |\Phi(X)|$ dla każdego podzbioru X zbioru V_1.

Wniosek

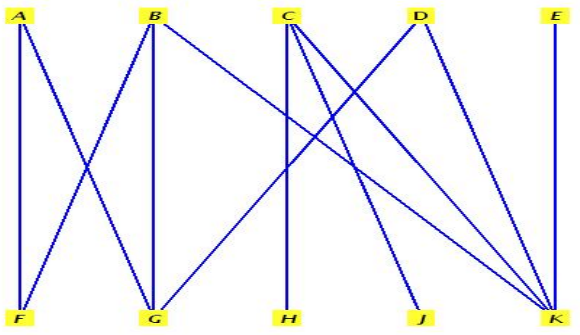
Grafy dwudzielne pełne mają pełne skojarzenia wtedy i tylko wtedy, gdy $|V_1| \leqslant |V_2|$.

Twierdzenie Halla-przykład

Nie istnieje pełne skojarzenie dla grafu z rysunku poniżej:

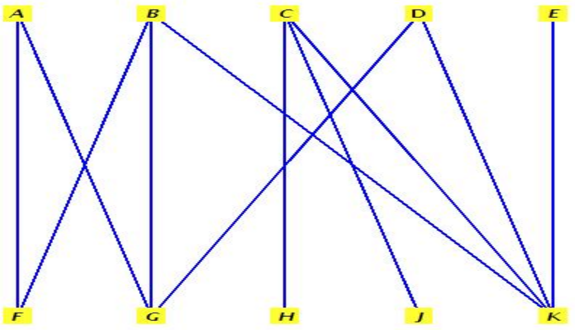
Twierdzenie Halla-przykład

Nie istnieje pełne skojarzenie dla grafu z rysunku poniżej:



Twierdzenie Halla-przykład

Nie istnieje pełne skojarzenie dla grafu z rysunku poniżej:



Zgodnie z twierdzeniem Halla, ten graf nie ma pełnego skojarzenia dla $V_1 = \{A, B, C, D, E\}$, $V_2 = \{F, G, H, J, K\}$, gdyż jeśli rozważymy $X = \{A, B, D, E\}$, to $\Phi(X) = \{F, G, K\}$, a zatem $|X| = 4 > 3 = |\Phi(X)|$.

Grafy dwudzielne i Nobel z ekonomii

Grafy dwudzielne badał Lloyd Shapley, który w 2012 roku otrzymał nagrodę Nobla z ekonomii między innymi za modelowanie i rozwiązanie zagadnienia optymalizacyjnego zwanego problemem stabilnego małżeństwa.

Grafy dwudzielne i Nobel z ekonomii

Grafy dwudzielne badał Lloyd Shapley, który w 2012 roku otrzymał nagrodę Nobla z ekonomii między innymi za modelowanie i rozwiązanie zagadnienia optymalizacyjnego zwanego problemem stabilnego małżeństwa. Jest to zadanie, w którym każdy kawaler i panna na wydaniu posiadają swój ranking płci przeciwnej i trzeba ich tak połączyć w pary małżeńskie, żeby nie doszło do „pokusy zdrady", czyli sytuacji, gdy pewna para (niemałżeńska) woli siebie nawzajem od swoich partnerów w małżeństwie.

Grafy dwudzielne i Nobel z ekonomii

Grafy dwudzielne badał Lloyd Shapley, który w 2012 roku otrzymał nagrodę Nobla z ekonomii między innymi za modelowanie i rozwiązanie zagadnienia optymalizacyjnego zwanego problemem stabilnego małżeństwa. Jest to zadanie, w którym każdy kawaler i panna na wydaniu posiadają swój ranking płci przeciwnej i trzeba ich tak połączyć w pary małżeńskie, żeby nie doszło do „pokusy zdrady", czyli sytuacji, gdy pewna para (niemałżeńska) woli siebie nawzajem od swoich partnerów w małżeństwie. Okazuje się, że bez względu na ranking indywidualnych preferencji, zawsze istnieje szczęśliwe rozwiązanie tego problemu.

Grafy dwudzielne i Nobel z ekonomii

Grafy dwudzielne badał Lloyd Shapley, który w 2012 roku otrzymał nagrodę Nobla z ekonomii między innymi za modelowanie i rozwiązanie zagadnienia optymalizacyjnego zwanego problemem stabilnego małżeństwa. Jest to zadanie, w którym każdy kawaler i panna na wydaniu posiadają swój ranking płci przeciwnej i trzeba ich tak połączyć w pary małżeńskie, żeby nie doszło do „pokusy zdrady”, czyli sytuacji, gdy pewna para (niemałżeńska) woli siebie nawzajem od swoich partnerów w małżeństwie. Okazuje się, że bez względu na ranking indywidualnych preferencji, zawsze istnieje szczęśliwe rozwiązanie tego problemu. Wspólnie z Davidem Gale'em, Shapley stworzył wydajny algorytm rozwiązujący to zagadnienie.

Grafy dwudzielne i hamiltonowskie

Wiemy, że w ogólnym przypadku trudno stwierdzić, kiedy graf jest hamiltonowski. Dla grafów dwudzielnych sprawdzenie tego jest dużo prostsze.

Twierdzenie o cyklu Hamiltona w grafach dwudzielnych

Niech $\mathbf{G} = (V_1 \cup V_2, E)$ będzie grafem dwudzielnym. Jeśli G ma cykl Hamiltona, to $|V_1| = |V_2|$.
Dla **pełnych** grafów dwudzielnych zachodzi też implikacja w przeciwną stronę, tj. jeśli $|V_1| = |V_2|$, to G ma cykl Hamiltona.

Kolorowanie wierzchołkowe - definicja

Kolorowanie wierzchołkowe

Kolorowaniem wierzchołkowym nazywamy każde przyporządkowanie wierzchołkom kolorów (lub innych etykiet), w którym żadne dwa sąsiednie wierzchołki nie są „pokolorowane" tak samo.
Formalnie, dla grafu prostego $G = (V, E)$ i zbioru skończonego K (kolorów) *kolorowaniem wierzchołkowym* (lub po prostu *kolorowaniem grafu*) nazywamy dowolną funkcję
$c : V \to K$ taką, że $c(v) \neq c(w)$ o ile $vw \in E$.

Kolorowanie wierzchołkowe - definicja

Kolorowanie wierzchołkowe

Kolorowaniem wierzchołkowym nazywamy każde przyporządkowanie wierzchołkom kolorów (lub innych etykiet), w którym żadne dwa sąsiednie wierzchołki nie są „pokolorowane” tak samo.
Formalnie, dla grafu prostego $G = (V, E)$ i zbioru skończonego K (kolorów) *kolorowaniem wierzchołkowym* (lub po prostu *kolorowaniem grafu*) nazywamy dowolną funkcję $c : V \to K$ taką, że $c(v) \neq c(w)$ o ile $vw \in E$.

Inaczej, kolorowanie wierzchołków grafu to jego podział na rozłączne antykliki (każdy zbiór wierzchołków pokolorowanych tym samym kolorem nie ma połączeń między sobą, więc jest antykliką).

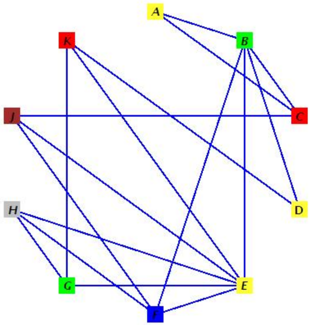
Kolorowanie wierzchołkowe - definicja

Kolorowanie wierzchołkowe

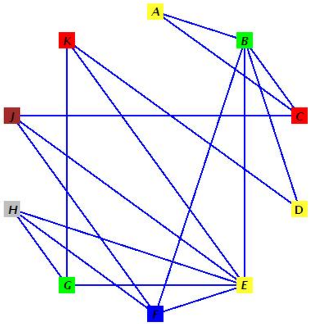
Kolorowaniem wierzchołkowym nazywamy każde przyporządkowanie wierzchołkom kolorów (lub innych etykiet), w którym żadne dwa sąsiednie wierzchołki nie są „pokolorowane” tak samo.
Formalnie, dla grafu prostego $G = (V, E)$ i zbioru skończonego K (kolorów) *kolorowaniem wierzchołkowym* (lub po prostu *kolorowaniem grafu*) nazywamy dowolną funkcję
$c : V \to K$ taką, że $c(v) \neq c(w)$ o ile $vw \in E$.

Inaczej, kolorowanie wierzchołków grafu to jego podział na rozłączne antykliki (każdy zbiór wierzchołków pokolorowanych tym samym kolorem nie ma połączeń między sobą, więc jest antykliką).
Najciekawszym problemem związanym z kolorowaniem grafu jest znalezienie *kolorowania optymalnego*, czyli takiego, które używa jak najmniejszej liczby kolorów.

Kolorowanie wierzchołkowe - przykład

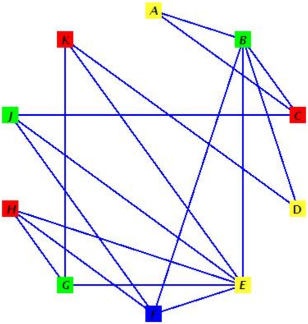


Kolorowanie wierzchołkowe - przykład

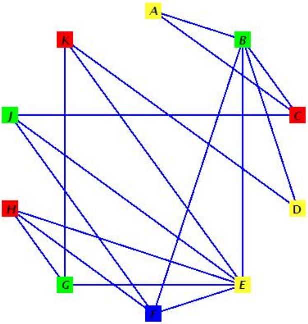


Powyżej przykład kolorowania wierzchołkowego za pomocą sześciu kolorów. Nie jest to oczywiście kolorowanie optymalne.

Kolorowanie wierzchołkowe - przykład

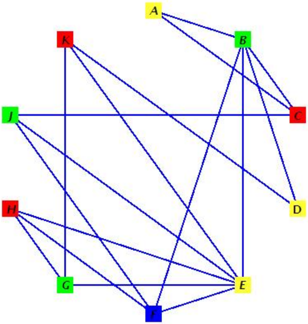


Kolorowanie wierzchołkowe - przykład



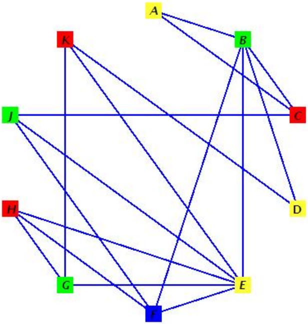
To kolorowanie wymaga tylko 4 kolorów, więc jest lepsze.

Kolorowanie wierzchołkowe - przykład



To kolorowanie wymaga tylko 4 kolorów, więc jest lepsze. Czy jednak jest optymalne?

Kolorowanie wierzchołkowe - przykład



To kolorowanie wymaga tylko 4 kolorów, więc jest lepsze. Czy jednak jest optymalne? I właściwie do czego to się przydaje?

Kolorowanie wierzchołkowe - zastosowania

Kolorowanie wierzchołkowe - zastosowania

- Załóżmy, że chcemy umieścić w różnych pojemnikach pewne substancje chemiczne tak, by substancje w jednym pojemniku nie reagowały ze sobą. Oznaczamy te substancje jako wierzchołki grafu. Krawędzie pojawiają się pomiędzy substancjami reagującymi ze sobą. Jeśli znajdziemy optymalne kolorowanie wierzchołkowe, to będziemy mogli umieścić substancje „tego samego koloru” w jednym pojemniku (bo nie reagują ze sobą). Ta minimalna liczba kolorów będzie liczbą pojemników, których potrzebujemy.

Kolorowanie wierzchołkowe - zastosowania

- Załóżmy, że chcemy umieścić w różnych pojemnikach pewne substancje chemiczne tak, by substancje w jednym pojemniku nie reagowały ze sobą. Oznaczamy te substancje jako wierzchołki grafu. Krawędzie pojawiają się pomiędzy substancjami reagującymi ze sobą. Jeśli znajdziemy optymalne kolorowanie wierzchołkowe, to będziemy mogli umieścić substancje „tego samego koloru” w jednym pojemniku (bo nie reagują ze sobą). Ta minimalna liczba kolorów będzie liczbą pojemników, których potrzebujemy.
- Zapraszamy gości na przyjęcie. Niektórzy goście się nie lubią, więc nie chcemy ich sadzać przy jednym stoliku. Wszystkich gości opisujemy jako wierzchołki grafu, krawędzie symbolizują konflikty między nimi. Minimalna liczba kolorów będzie liczbą stolików, których potrzebujemy, by nie sadzać nielubiących się gości przy jednym.

Liczba chromatyczna

Liczba chromatyczna

Liczbą chromatyczną grafu G nazywamy najmniejszą liczbę barw, którą można pokolorować wierzchołki tego grafu, tak by każde dwa sąsiednie były różnych kolorów. Liczbę tę zapisujemy $\chi(G)$. Formalnie, jest to najmniejsza możliwa moc zbioru K z definicji kolorowania wierzchołkowego, taka, że dla tego zbioru funkcja c istnieje.

Liczba chromatyczna - przykłady

Liczba chromatyczna - przykłady

- Dla antyklik liczba chromatyczna wynosi 1 (to jedyne takie grafy), a dla klik $\chi(K_n) = n$.

Liczba chromatyczna - przykłady

- Dla antyklik liczba chromatyczna wynosi 1 (to jedyne takie grafy), a dla klik $\chi(K_n) = n$.
- Jeśli H - podgraf G, to $\chi(H) \leqslant \chi(G)$.

Liczba chromatyczna - przykłady

- Dla antyklik liczba chromatyczna wynosi 1 (to jedyne takie grafy), a dla klik $\chi(K_n) = n$.
- Jeśli H - podgraf G, to $\chi(H) \leqslant \chi(G)$.
- Jeśli G to graf-droga to $\chi(G) = 2$.

Liczba chromatyczna - przykłady

- Dla antyklik liczba chromatyczna wynosi 1 (to jedyne takie grafy), a dla klik $\chi(K_n) = n$.
- Jeśli H - podgraf G, to $\chi(H) \leqslant \chi(G)$.
- Jeśli G to graf-droga to $\chi(G) = 2$.
- Jeśli G to graf-cykl to $\chi(G) = 2$, jeśli G ma parzystą liczbę wierzchołków i $\chi(G) = 3$, jeśli G ma nieparzystą liczbę wierzchołków.

Liczba chromatyczna - przykłady

- Dla antyklik liczba chromatyczna wynosi 1 (to jedyne takie grafy), a dla klik $\chi(K_n) = n$.
- Jeśli H - podgraf G, to $\chi(H) \leqslant \chi(G)$.
- Jeśli G to graf-droga to $\chi(G) = 2$.
- Jeśli G to graf-cykl to $\chi(G) = 2$, jeśli G ma parzystą liczbę wierzchołków i $\chi(G) = 3$, jeśli G ma nieparzystą liczbę wierzchołków.
- Grafy dwudzielne (w tym drzewa) mają liczbę chromatyczną równą 2. Co więcej, graf jest dwudzielny wtedy i tylko wtedy gdy jego liczba chromatyczna jest nie większa niż 2 .

Liczba chromatyczna - przykłady

- Dla antyklik liczba chromatyczna wynosi 1 (to jedyne takie grafy), a dla klik $\chi(K_n) = n$.
- Jeśli H - podgraf G, to $\chi(H) \leqslant \chi(G)$.
- Jeśli G to graf-droga to $\chi(G) = 2$.
- Jeśli G to graf-cykl to $\chi(G) = 2$, jeśli G ma parzystą liczbę wierzchołków i $\chi(G) = 3$, jeśli G ma nieparzystą liczbę wierzchołków.
- Grafy dwudzielne (w tym drzewa) mają liczbę chromatyczną równą 2. Co więcej, graf jest dwudzielny wtedy i tylko wtedy gdy jego liczba chromatyczna jest nie większa niż 2 .
- Graf Petersena ma liczbę chromatyczną równą 3.

Liczba chromatyczna - przykłady

- Dla antyklik liczba chromatyczna wynosi 1 (to jedyne takie grafy), a dla klik $\chi(K_n) = n$.
- Jeśli H - podgraf G, to $\chi(H) \leqslant \chi(G)$.
- Jeśli G to graf-droga to $\chi(G) = 2$.
- Jeśli G to graf-cykl to $\chi(G) = 2$, jeśli G ma parzystą liczbę wierzchołków i $\chi(G) = 3$, jeśli G ma nieparzystą liczbę wierzchołków.
- Grafy dwudzielne (w tym drzewa) mają liczbę chromatyczną równą 2. Co więcej, graf jest dwudzielny wtedy i tylko wtedy gdy jego liczba chromatyczna jest nie większa niż 2 .
- Graf Petersena ma liczbę chromatyczną równą 3.
- Ogólnie problem dokładnego określenia liczby chromatycznej grafu jest trudny. Jednak istnieją dość proste oszacowania z góry tej liczby.

Maksymalny stopień grafu

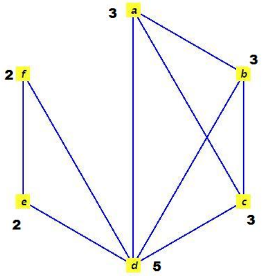
Maksymalny stopień grafu

Maksymalny stopień grafu G (oznaczony $\Delta(G)$) to największa z liczb $\deg v$, gdzie $v \in V(G)$ (czyli największy możliwy stopień wierzchołka w grafie G).

Maksymalny stopień grafu

Maksymalny stopień grafu

Maksymalny stopień grafu G (oznaczony $\Delta(G)$) to największa z liczb $\deg v$, gdzie $v \in V(G)$ (czyli największy możliwy stopień wierzchołka w grafie G).



Stopnie wierzchołków w powyższym grafie G są podpisane. Stąd $\Delta(G) = 5$.

Twierdzenie Brooksa

Twierdzenie Brooksa

Jeśli G jest kliką lub cyklem o nieparzystej liczbie wierzchołków, to $\chi(G) = \Delta G + 1$. Jeśli G jest dowolnym innym grafem to $\chi(G) \leqslant \Delta G$.

Twierdzenie Brooksa

Twierdzenie Brooksa

Jeśli G jest kliką lub cyklem o nieparzystej liczbie wierzchołków, to $\chi(G) = \Delta G + 1$. Jeśli G jest dowolnym innym grafem to $\chi(G) \leqslant \Delta G$.

- Dla cykli, maksymalny stopień wynosi 2. Dlatego jeśli cykl ma nieparzystą liczbę wierzchołków, to jego liczba chromatyczna wynosi 3.

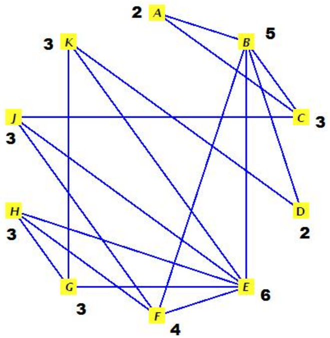
Twierdzenie Brooksa

Twierdzenie Brooksa

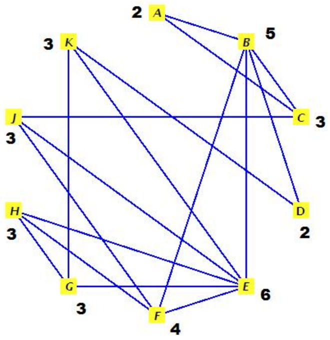
Jeśli G jest kliką lub cyklem o nieparzystej liczbie wierzchołków, to $\chi(G) = \Delta G + 1$. Jeśli G jest dowolnym innym grafem to $\chi(G) \leqslant \Delta G$.

- Dla cykli, maksymalny stopień wynosi 2. Dlatego jeśli cykl ma nieparzystą liczbę wierzchołków, to jego liczba chromatyczna wynosi 3.
- Jeśli cykl ma parzystą liczbę wierzchołków, to jego liczba chromatyczna wynosi 2. Można go pokolorować dwoma kolorami - wierzchołki parzyste jednym, wierzchołki nieparzyste drugim. Spełnia nierówność: $2 = \chi(G) \leqslant \Delta G = 2$

Twierdzenie Brooksa - przykład

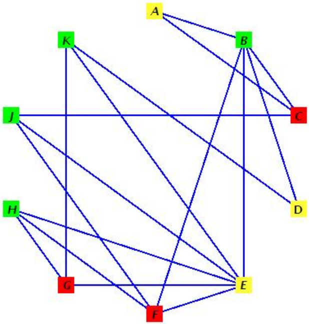


Twierdzenie Brooksa - przykład

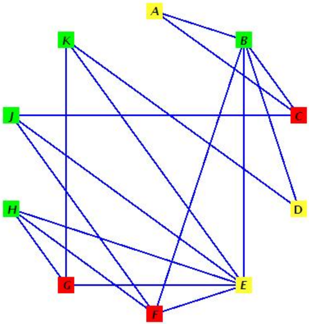


Nierówność w twierdzeniu Brooksa może być „bardzo ostra”. Na przykład tu z twierdzenia Brooksa wiemy tylko, że $\chi(G) \leqslant \Delta G = 6 \ldots$

Twierdzenie Brooksa - przykład



Twierdzenie Brooksa - przykład



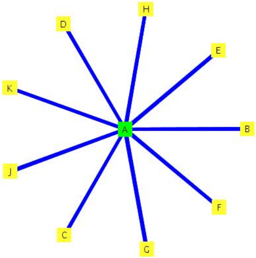
...a w rzeczywistości $\chi(G) = 3$ (przykład z rysunku, mniej niż 3 nie może być bo np. ABC tworzą 3-klikę).

Twierdzenie Brooksa - przykład

Oszacowanie z twierdzenia Brooksa może być „dowolnie słabe”. W szczególności, można skonstruować „gwiazdę” o dowolnej liczbie wierzchołków...

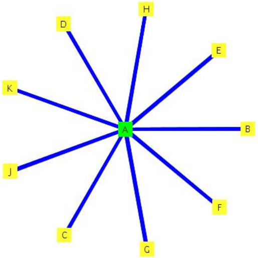
Twierdzenie Brooksa - przykład

Oszacowanie z twierdzenia Brooksa może być „dowolnie słabe". W szczególności, można skonstruować „gwiazdę" o dowolnej liczbie wierzchołków...



Twierdzenie Brooksa - przykład

Oszacowanie z twierdzenia Brooksa może być „dowolnie słabe”. W szczególności, można skonstruować „gwiazdę” o dowolnej liczbie wierzchołków...



...dla której oszacowanie z twierdzenia Brooksa jest o jeden mniejsze niż liczba wierzchołków, a $\chi(G) = 2$.

Ciekawostka - zagadnienie czterech barw

Dlatego taką trudność sprawiło matematykom i informatykom tzw. zagadnienie czterech barw:

Zagadnienie czterech barw

Czy każdą mapę polityczną na płaszczyźnie da się pomalować 4 barwami tak, by sąsiadujące kraje były pomalowane innymi kolorami?

Ciekawostka - zagadnienie czterech barw

Dlatego taką trudność sprawiło matematykom i informatykom tzw. zagadnienie czterech barw:

Zagadnienie czterech barw

Czy każdą mapę polityczną na płaszczyźnie da się pomalować 4 barwami tak, by sąsiadujące kraje były pomalowane innymi kolorami?

Po spostrzeżeniu, że kraje można zastąpić wierzchołkami grafu, a granice - krawędziami między graniczącymi państwami problem ten zmienia się w:

Zagadnienie czterech barw

Czy każdy graf G - planarny (tj. taki, że można go narysować na płaszczyźnie tak, by jego krawędzie się nie przecinały) spełnia $\chi(G) \leqslant 4$?

Ciekawostka - zagadnienie czterech barw

Problem 4 barw został postawiony w połowie XIX wieku, a rozwiązali go dopiero Apple, Haken i Koch w 1977 roku.

Ciekawostka - zagadnienie czterech barw

Problem 4 barw został postawiony w połowie XIX wieku, a rozwiązali go dopiero Apple, Haken i Koch w 1977 roku.Odpowiedź była pozytywna (więc odtąd mówi się raczej o Twierdzeniu o Czterech Barwach), ale... nie została chętnie uznana przez środowisko matematyczne.

Ciekawostka - zagadnienie czterech barw

Problem 4 barw został postawiony w połowie XIX wieku, a rozwiązali go dopiero Apple, Haken i Koch w 1977 roku.Odpowiedź była pozytywna (więc odtąd mówi się raczej o Twierdzeniu o Czterech Barwach), ale... nie została chętnie uznana przez środowisko matematyczne. Powodem był fakt, że do dowodu konieczne było zastosowanie komputera: autorzy sprowadzili zagadnienie do sprawdzenia ok. 1500 skomplikowanych przypadków, które przeliczył komputer.

Ciekawostka - zagadnienie czterech barw

Problem 4 barw został postawiony w połowie XIX wieku, a rozwiązali go dopiero Apple, Haken i Koch w 1977 roku.Odpowiedź była pozytywna (więc odtąd mówi się raczej o Twierdzeniu o Czterech Barwach), ale... nie została chętnie uznana przez środowisko matematyczne. Powodem był fakt, że do dowodu konieczne było zastosowanie komputera: autorzy sprowadzili zagadnienie do sprawdzenia ok. 1500 skomplikowanych przypadków, które przeliczył komputer. Napotkało to problemy filozoficzne: jak udowodnić, że komputer się nie pomylił, zwłaszcza, że program był bardzo skomplikowany, a jego wykonanie trwało wiele dni (wiarygodność ówczesnych komputerów też nie była wysoka).

Ciekawostka - zagadnienie czterech barw

Problem 4 barw został postawiony w połowie XIX wieku, a rozwiązali go dopiero Apple, Haken i Koch w 1977 roku.Odpowiedź była pozytywna (więc odtąd mówi się raczej o Twierdzeniu o Czterech Barwach), ale... nie została chętnie uznana przez środowisko matematyczne. Powodem był fakt, że do dowodu konieczne było zastosowanie komputera: autorzy sprowadzili zagadnienie do sprawdzenia ok. 1500 skomplikowanych przypadków, które przeliczył komputer. Napotkało to problemy filozoficzne: jak udowodnić, że komputer się nie pomylił, zwłaszcza, że program był bardzo skomplikowany, a jego wykonanie trwało wiele dni (wiarygodność ówczesnych komputerów też nie była wysoka). Dziś mamy ulepszone dowody (choć do wszystkich konieczne jest komputerowe wspomaganie), które da się sprawdzić w ciągu kilku godzin na własnym laptopie, więc matematycy uznają Twierdzenie o Czterech Barwach za prawdziwe.

Kolorowanie krawędziowe - definicja

Kolorowanie krawędziowe

Kolorowanie krawędziowe grafu $G = (V(G), E(G))$ to każde przyporządkowanie krawędziom grafu kolorów, w którym dwie krawędzie o wspólnym wierzchołku mają różne kolory.
Formalnie, jest to funkcja $c : E(G) \rightarrow K$ (K - skończony zbiór kolorów lub innych etykiet), taka, że dla dowolnych $u, v, w \in V(G)$, jeżeli $vu, vw \in E(G)$ to $c(vu) \neq c(vw)$.

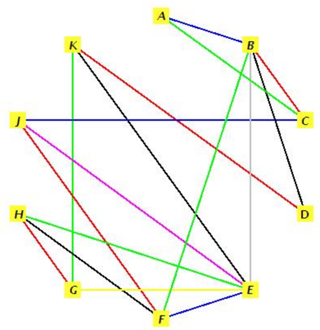
Kolorowanie krawędziowe - definicja

Kolorowanie krawędziowe

Kolorowanie krawędziowe grafu $G = (V(G), E(G))$ to każde przyporządkowanie krawędziom grafu kolorów, w którym dwie krawędzie o wspólnym wierzchołku mają różne kolory.
Formalnie, jest to funkcja $c : E(G) \to K$ (K - skończony zbiór kolorów lub innych etykiet), taka, że dla dowolnych $u, v, w \in V(G)$, jeżeli $vu, vw \in E(G)$ to $c(vu) \neq c(vw)$.

Ponownie, najciekawszym problemem związanym z kolorowaniem krawędziowym grafu jest znalezienie *kolorowania optymalnego*, czyli takiego, które używa jak najmniejszej liczby kolorów.

Kolorowanie krawędziowe - przykład



Powyżej przykład kolorowania krawędziowego za pomocą siedmiu kolorów. Czy jest to kolorowanie optymalne?

Kolorowanie krawędziowe - zastosowania

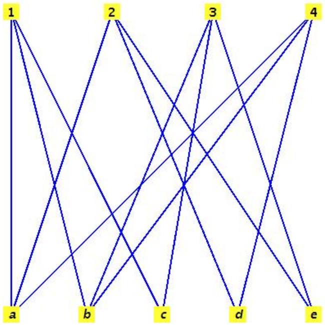
Kolorowanie krawędziowe - zastosowania

- Układanie harmonogramów zajęć na uczelni: Dany niech będzie graf dwudzielny. Pierwszy typ wierzchołków to pracownicy dydaktyczni, a drugi - grupy dziekańskie. Wierzchołki są połączone wtedy i tylko wtedy, gdy dany pracownik ma poprowadzić zajęcia z daną grupą. Kolory krawędzi odpowiadają różnym godzinom, w których mogą się odbyć zajęcia. Oczywiście, żadna grupa i żaden nauczyciel nie może mieć więcej niż jedne zajęcia na raz, więc musimy krawędzie pokolorować zgodnie z warunkami kolorowania krawędziowego.

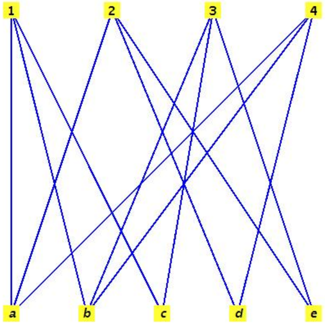
Kolorowanie krawędziowe - zastosowania

- Układanie harmonogramów zajęć na uczelni: Dany niech będzie graf dwudzielny. Pierwszy typ wierzchołków to pracownicy dydaktyczni, a drugi - grupy dziekańskie. Wierzchołki są połączone wtedy i tylko wtedy, gdy dany pracownik ma poprowadzić zajęcia z daną grupą. Kolory krawędzi odpowiadają różnym godzinom, w których mogą się odbyć zajęcia. Oczywiście, żadna grupa i żaden nauczyciel nie może mieć więcej niż jedne zajęcia na raz, więc musimy krawędzie pokolorować zgodnie z warunkami kolorowania krawędziowego.
  Będzie nas interesować najmniejsza możliwa liczba kolorów koniecznych do użycia w kolorowaniu krawędziowym. Liczba ta będzie symbolizować minimalną liczbę godzin, w których da się poukładać wszystkie zajęcia.

Kolorowanie krawędziowe - przykład zastosowań



Kolorowanie krawędziowe - przykład zastosowań



Grupy dziekańskie w tym przypadku oznaczyłem cyframi, a nauczycieli literami.

Indeks chromatyczny i twierdzenie Vizinga

Indeks chromatyczny

Indeks chromatyczny grafu G (oznaczany przez $\chi'(G)$) to minimalna liczba kolorów, które trzeba wykorzystać, by wykonać kolorowanie krawędziowe tego grafu.
Formalnie, jest to najmniejsza możliwa moc zbioru K z definicji kolorowania krawędziowego, taka, że dla tego zbioru funkcja c istnieje.

Indeks chromatyczny i twierdzenie Vizinga

Indeks chromatyczny

Indeks chromatyczny grafu G (oznaczany przez $\chi'(G)$) to minimalna liczba kolorów, które trzeba wykorzystać, by wykonać kolorowanie krawędziowe tego grafu.
Formalnie, jest to najmniejsza możliwa moc zbioru K z definicji kolorowania krawędziowego, taka, że dla tego zbioru funkcja c istnieje.

Indeks chromatyczny można oszacować znacznie precyzyjniej niż liczbę chromatyczną:

Indeks chromatyczny i twierdzenie Vizinga

Indeks chromatyczny

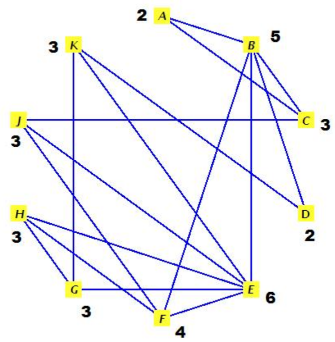
Indeks chromatyczny grafu G (oznaczany przez $\chi'(G)$) to minimalna liczba kolorów, które trzeba wykorzystać, by wykonać kolorowanie krawędziowe tego grafu.
Formalnie, jest to najmniejsza możliwa moc zbioru K z definicji kolorowania krawędziowego, taka, że dla tego zbioru funkcja c istnieje.

Indeks chromatyczny można oszacować znacznie precyzyjniej niż liczbę chromatyczną:

Twierdzenie Vizinga

Dla dowolnego grafu G zachodzi: $\Delta(G) \leqslant \chi'(G) \leqslant \Delta(G) + 1$.

Twierdzenie Vizinga - przykład



W szczególności dla tego grafu $6 \leqslant \chi'(G) \leqslant 7$. Czy zatem nasze wcześniejsze kolorowanie było optymalne? Ćwiczenie.

Twierdzenie Vizinga - szczególne przypadki

Twierdzenie Vizinga - szczególne przypadki

- Równość $\Delta(G) = \chi'(G)$ zachodzi dla o wiele większej liczby grafów niż $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

Twierdzenie Vizinga - szczególne przypadki

- Równość $\Delta(G) = \chi'(G)$ zachodzi dla o wiele większej liczby grafów niż $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.
- Kliki o parzystej liczbie wierzchołków spełniają równość $\Delta(G) = \chi'(G)$, a kliki o nieparzystej liczbie wierzchołków: $\Delta(G) + 1 = \chi'(G)$.

Twierdzenie Vizinga - szczególne przypadki

- Równość $\Delta(G) = \chi'(G)$ zachodzi dla o wiele większej liczby grafów niż $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.
- Kliki o parzystej liczbie wierzchołków spełniają równość $\Delta(G) = \chi'(G)$, a kliki o nieparzystej liczbie wierzchołków: $\Delta(G) + 1 = \chi'(G)$.
- Jeśli H - podgraf G, to $\chi'(H) \leqslant \chi'(G)$.

Twierdzenie Vizinga - szczególne przypadki

- Równość $\Delta(G) = \chi'(G)$ zachodzi dla o wiele większej liczby grafów niż $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.
- Kliki o parzystej liczbie wierzchołków spełniają równość $\Delta(G) = \chi'(G)$, a kliki o nieparzystej liczbie wierzchołków: $\Delta(G) + 1 = \chi'(G)$.
- Jeśli H - podgraf G, to $\chi'(H) \leqslant \chi'(G)$.
- Jeśli G to graf-droga to $\chi'(G) = 2$ (czyli $\Delta(G) = \chi'(G)$).

Twierdzenie Vizinga - szczególne przypadki

- Równość $\Delta(G) = \chi'(G)$ zachodzi dla o wiele większej liczby grafów niż $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.
- Kliki o parzystej liczbie wierzchołków spełniają równość $\Delta(G) = \chi'(G)$, a kliki o nieparzystej liczbie wierzchołków: $\Delta(G) + 1 = \chi'(G)$.
- Jeśli H - podgraf G, to $\chi'(H) \leqslant \chi'(G)$.
- Jeśli G to graf-droga to $\chi'(G) = 2$ (czyli $\Delta(G) = \chi'(G)$).
- Jeśli G to graf-cykl to $\chi'(G) = 2$, jeśli G ma parzystą liczbę wierzchołków (czyli $\Delta(G) = \chi'(G)$) i $\chi'(G) = 3$, jeśli G ma nieparzystą liczbę wierzchołków (czyli $\Delta(G) + 1 = \chi'(G)$).

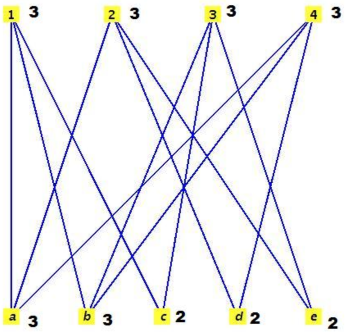
Twierdzenie Vizinga - szczególne przypadki

- Równość $\Delta(G) = \chi'(G)$ zachodzi dla o wiele większej liczby grafów niż $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.
- Kliki o parzystej liczbie wierzchołków spełniają równość $\Delta(G) = \chi'(G)$, a kliki o nieparzystej liczbie wierzchołków: $\Delta(G) + 1 = \chi'(G)$.
- Jeśli H - podgraf G, to $\chi'(H) \leqslant \chi'(G)$.
- Jeśli G to graf-droga to $\chi'(G) = 2$ (czyli $\Delta(G) = \chi'(G)$).
- Jeśli G to graf-cykl to $\chi'(G) = 2$, jeśli G ma parzystą liczbę wierzchołków (czyli $\Delta(G) = \chi'(G)$) i $\chi'(G) = 3$, jeśli G ma nieparzystą liczbę wierzchołków (czyli $\Delta(G) + 1 = \chi'(G)$).
- Graf Petersena ma indeks chromatyczny równy 4 (czyli $\Delta(G) + 1 = \chi'(G)$).

Twierdzenie Vizinga - szczególne przypadki

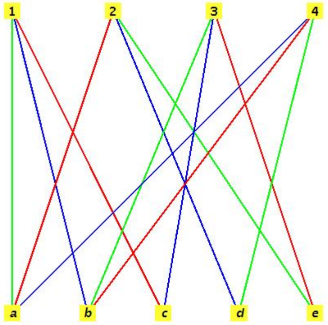
- Równość $\Delta(G) = \chi'(G)$ zachodzi dla o wiele większej liczby grafów niż $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.
- Kliki o parzystej liczbie wierzchołków spełniają równość $\Delta(G) = \chi'(G)$, a kliki o nieparzystej liczbie wierzchołków: $\Delta(G) + 1 = \chi'(G)$.
- Jeśli H - podgraf G, to $\chi'(H) \leqslant \chi'(G)$.
- Jeśli G to graf-droga to $\chi'(G) = 2$ (czyli $\Delta(G) = \chi'(G)$).
- Jeśli G to graf-cykl to $\chi'(G) = 2$, jeśli G ma parzystą liczbę wierzchołków (czyli $\Delta(G) = \chi'(G)$) i $\chi'(G) = 3$, jeśli G ma nieparzystą liczbę wierzchołków (czyli $\Delta(G) + 1 = \chi'(G)$).
- Graf Petersena ma indeks chromatyczny równy 4 (czyli $\Delta(G) + 1 = \chi'(G)$).
- Dla grafów dwudzielnych (w tym drzew) zachodzi $\Delta(G) = \chi'(G)$. Z tej własności skorzystamy dla zagadnienia podziału zajęć.

Twierdzenie Vizinga - przykład



Z twierdzenia Vizinga i wniosku o grafach dwudzielnych możemy wykazać, że indeks chromatyczny powyższego grafu wynosi 3.

Twierdzenie Vizinga - przykład



Faktycznie, krawędzie dało się pokolorować trzema kolorami, zatem (o ile nie ograniczają nas inne czynniki zewnętrzne) można ułożyć harmonogram tak, żeby wszystkie odbyły się w ciągu 3 terminów - np. najpierw odbywają się (jednocześnie) zajęcia „czerwone”, potem „zielone”, a potem „niebieskie”.