

5c. Sieci i przepływy

Grzegorz Kosiorowski

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

1 Definicje

2 Algorytm Edmondsa-Karpa

Sieć

Sieć jest to graf skierowany z nieujemnymi wagami (funkcja wag jest w tym wypadku zwana *przepustowością sieci*) oraz dwoma wyróżnionymi wierzchołkami, które są odpowiednio nazywane *źródłem* i *ujściem* sieci.

Przykłady

Sieć

Sieć jest to graf skierowany z nieujemnymi wagami (funkcja wag jest w tym wypadku zwana *przepustowością sieci*) oraz dwoma wyróżnionymi wierzchołkami, które są odpowiednio nazywane *źródłem* i *ujściem* sieci.

Przykłady

- Wodociągi.

Sieć

Sieć jest to graf skierowany z nieujemnymi wagami (funkcja wag jest w tym wypadku zwana *przepustowością sieci*) oraz dwoma wyróżnionymi wierzchołkami, które są odpowiednio nazywane *źródłem* i *ujściem* sieci.

Przykłady

- Wodociągi.
- Sieć komputerowa.

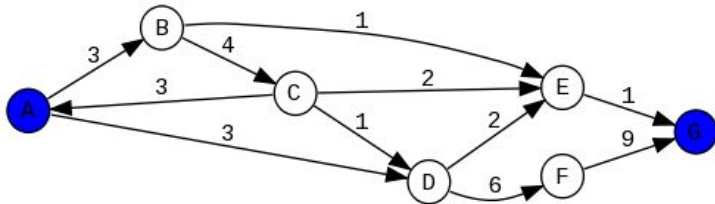
Sieć

Sieć jest to graf skierowany z nieujemnymi wagami (funkcja wag jest w tym wypadku zwana *przepustowością sieci*) oraz dwoma wyróżnionymi wierzchołkami, które są odpowiednio nazywane *źródłem* i *ujściem* sieci.

Przykłady

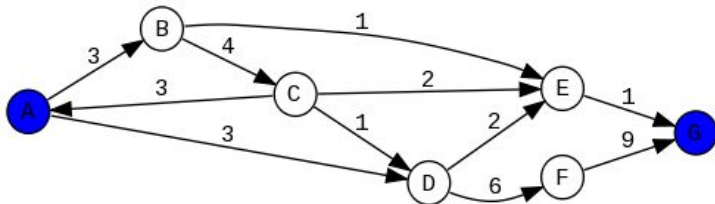
- Wodociągi.
- Sieć komputerowa.
- Sieć kolejowa lub drogowa.

Przykładowa sieć



A jest źródłem, a G - ujściem sieci.

Przykładowa sieć



A jest źródłem, a G - ujściem sieci.

W takiej sieci podstawowe jest pytanie: przy danej przepustowości łączy, ile można przesłać (wody, danych, towarów) od źródła do ujścia (w jednostce czasu)?

Przepływ

Przepływ sieci (V, E) z przepustowością c to funkcja $f : E \rightarrow [0, \infty)$ spełniająca warunki:

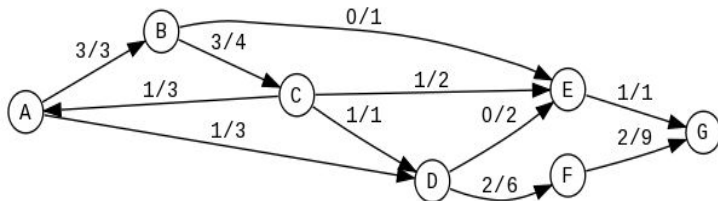
1) $0 \leq f(v, w) \leq c(v, w)$ dla każdej krawędzi (v, w) (tj. przepływ wzdłuż krawędzi nie przekracza jej przepustowości).

2) $\sum_{x \in V, (x, v) \in E} f(x, v) = \sum_{x \in V, (v, x) \in E} f(v, x)$ dla każdego wierzchołka v poza źródłem s i ujściem t . Równość ta oznacza, że sumaryczna wartość tego, co wpływa do wierzchołka jest równa sumarycznej wartości tego, co zeń wypływa.

3) $\sum_{x \in V} (f(s, x) - f(x, s)) = \sum_{x \in V} (f(x, t) - f(t, x))$ tzn. sumaryczna wartość tego, co wypływa ze źródła musi być równa sumarycznej wartości tego, co wpływa do ujścia. Wartość ta będzie określana *wartością przepływu* f .

Przepływ

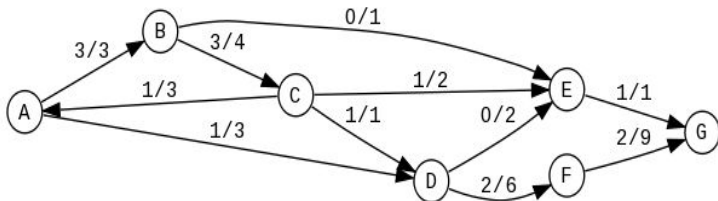
Intuicyjnie, przepływ to przyporządkowanie każdej krawędzi sieci wartości tego, co przez nią przepływa.



Przepływ o wartości 3 z A do G (uwaga - pozornie z A wychodzi 4!).

Przepływ

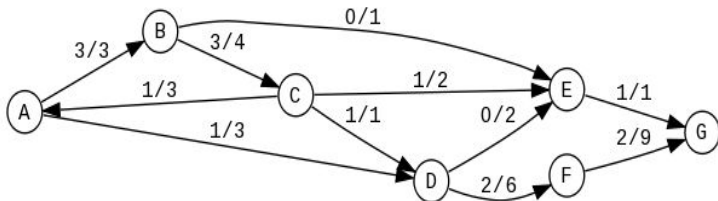
Intuicyjnie, przepływ to przyporządkowanie każdej krawędzi sieci wartości tego, co przez nią przepływa. Oczywiście, nie może być ona większa od przepustowości krawędzi (bo by się nie zmieściło w „rurze” - notujemy to jako a/b gdzie a jest przepływem przez krawędź, a b jej przepustowością),



Przepływ o wartości 3 z A do G (uwaga - pozornie z A wychodzi 4!).

Przepływ

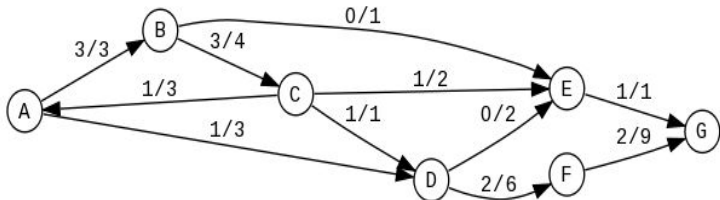
Intuicyjnie, przepływ to przyporządkowanie każdej krawędzi sieci wartości tego, co przez nią przepływa. Oczywiście, nie może być ona większa od przepustowości krawędzi (bo by się nie zmieściło w „ rurze” - notujemy to jako a/b gdzie a jest przepływem przez krawędź, a b jej przepustowością), nic nie może zatrzymywać się w wierzchołkach różnych od źródła i ujścia (bo „woda” by się spiętrzała)



Przepływ o wartości 3 z A do G (uwaga - pozornie z A wychodzi 4!).

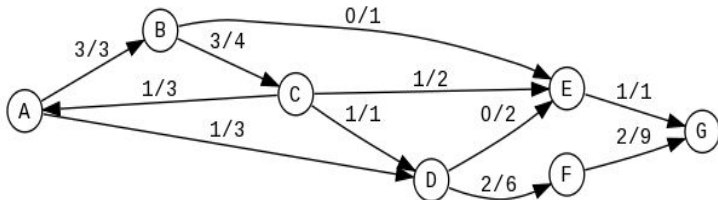
Przepływ

Intuicyjnie, przepływ to przyporządkowanie każdej krawędzi sieci wartości tego, co przez nią przepływa. Oczywiście, nie może być ona większa od przepustowości krawędzi (bo by się nie zmieściło w „ rurze” - notujemy to jako a/b gdzie a jest przepływem przez krawędź, a b jej przepustowością), nic nie może zatrzymywać się w wierzchołkach różnych od źródła i ujścia (bo „woda” by się spiętrzała) i tyle „wody” wchodzi do układu przez źródło, co uchodzi przez „ujście” (bo inaczej ilość „wody” w sieci by się zmieniała).



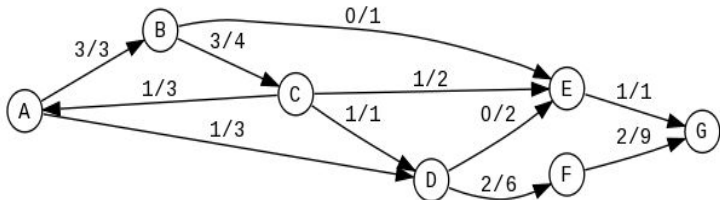
Przepływ o wartości 3 z A do G (uwaga - pozornie z A wychodzi 4!).

Przepływ



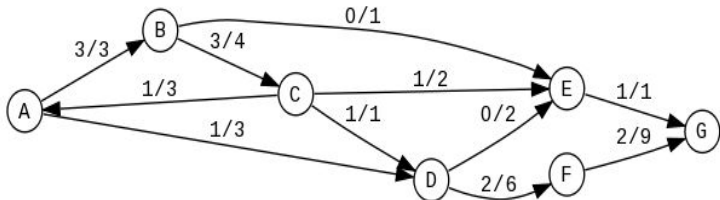
Zazwyczaj w tego typu sytuacjach poszukujemy *przepływu maksymalnego*, czyli takiego, żeby jego wartość była największa z możliwych.

Przepływ



Zazwyczaj w tego typu sytuacjach poszukujemy *przepływu maksymalnego*, czyli takiego, żeby jego wartość była największa z możliwych. Oczywiście, przepływ przedstawiony powyżej nie jest maksymalny: można go zwiększyć np. kierując kolejną jednostkę wody z A do D i dalej przez F do ujścia.

Przepływ



Zazwyczaj w tego typu sytuacjach poszukujemy *przepływu maksymalnego*, czyli takiego, żeby jego wartość była największa z możliwych. Oczywiście, przepływ przedstawiony powyżej nie jest maksymalny: można go zwiększyć np. kierując kolejną jednostkę wody z A do D i dalej przez F do ujścia. Wartość maksymalnego przepływu jest w tym przypadku na pewno nie większa od 6 (bo tyle wynosi suma przepustowości krawędzi wychodzących ze źródła, mimo, że suma przepustowości krawędzi wpadających do ujścia wynosi 10).

Sieć residualna

Siecią residualną dla sieci $G = (V, E)$ z przepustowością c i przepływem f , nazywamy sieć $G_f = (V, E_f)$, gdzie E_f jest zdefiniowane następująco:

$$E_f = \{(u, v) \in V \times V : c_f(u, v) > 0\},$$

gdzie $c_f(u, v)$ oznacza tzw. *przepustowość residualną* dla krawędzi (u, v) . Ta natomiast jest dana wzorem:

$$c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v),$$

gdzie: jeśli $(u, v) \notin E$ to $c(u, v) = 0$, oraz $f(v, u) = -a$, gdy $f(u, v) = a$. Krawędzie należące do E_f , nazywa się *krawędziami residualnymi*.

Bardziej intuicyjnie, przepustowość residualna dla pewnej krawędzi (u, v) , oznacza, o ile można zwiększyć przepływ przez nią, tak jednak, aby nie przekroczył on jej przepustowości. Do sieci residualnej natomiast należą te krawędzie, przez które przepływ można zwiększyć.

Bardziej intuicyjnie, przepustowość residualna dla pewnej krawędzi (u, v) , oznacza, o ile można zwiększyć przepływ przez nią, tak jednak, aby nie przekroczył on jej przepustowości. Do sieci residualnej natomiast należą te krawędzie, przez które przepływ można zwiększyć. Przykładowo, jeśli między wierzchołkami sieci u i v jest krawędź o przepustowości 5, na której zdefiniowano przepływ o wartości 2, to krawędź ta jest krawędzią residualną o przepustowości residualnej 3.

Bardziej intuicyjnie, przepustowość residualna dla pewnej krawędzi (u, v) , oznacza, o ile można zwiększyć przepływ przez nią, tak jednak, aby nie przekroczył on jej przepustowości. Do sieci residualnej natomiast należą te krawędzie, przez które przepływ można zwiększyć. Przykładowo, jeśli między wierzchołkami sieci u i v jest krawędź o przepustowości 5, na której zdefiniowano przepływ o wartości 2, to krawędź ta jest krawędzią residualną o przepustowości residualnej 3. Jeśli przez tę samą krawędź przepuszczono by przepływ o wartości 5, ta krawędź przestałaby należeć do sieci residualnej (bo już nic więcej nie da się tamtędy precyzyjnie).

Sieć residualna - powstawanie nowych krawędzi

Mniej intuicyjne, ale ważne jest to, że mogą się w sieci residualnej pojawić krawędzie, których nie było w sieci wyjściowej.

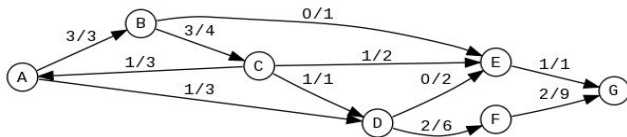
Sieć residualna - powstawanie nowych krawędzi

Mniej intuicyjne, ale ważne jest to, że mogą się w sieci residualnej pojawić krawędzie, których nie było w sieci wyjściowej. Wróćmy do przykładu: między wierzchołkami sieci u i v jest krawędź o przepustowości 5, na której zdefiniowano przepływ o wartości 2. Wtedy, poza krawędzią (u, v) o przepustowości 3 pojawi się w sieci residualnej krawędź (v, u) o przepustowości 2, symbolizująca możliwość „cofnięcia” przepływu o wartości 2 przez tę krawędź.

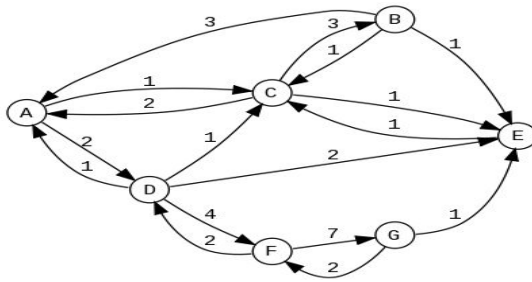
Sieć residualna - powstawanie nowych krawędzi

Mniej intuicyjne, ale ważne jest to, że mogą się w sieci residualnej pojawić krawędzie, których nie było w sieci wyjściowej. Wróćmy do przykładu: między wierzchołkami sieci u i v jest krawędź o przepustowości 5, na której zdefiniowano przepływ o wartości 2. Wtedy, poza krawędzią (u, v) o przepustowości 3 pojawi się w sieci residualnej krawędź (v, u) o przepustowości 2, symbolizująca możliwość „cofnięcia” przepływu o wartości 2 przez tę krawędź. Dzięki temu, można „poprawiać” na sieci residualnej przepływ, który chwilowo „popłynię” nieoptymalną ścieżką.

Sieć residualna - przykład



Na górze przepływ, na dole odpowiadająca mu sieć residualna. Dzięki niej można szukać kolejnych dróg zwiększania przepływu ze źródła do ujścia



Ścieżka powiększająca

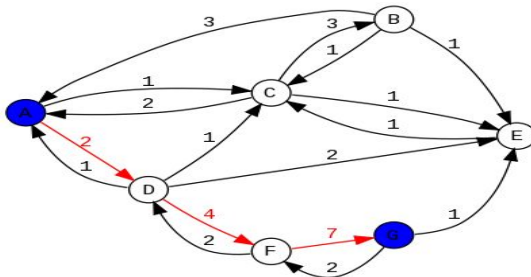
Ścieżka powiększająca

Ścieżką powiększającą dla sieci G z przepływem f nazywamy dowolną drogę ze źródła do ujścia w sieci residualnej dla G . Przepustowość residualną ścieżki powiększającej p , dla sieci G , określamy wzorem:

$$c_f(p) = \min \{c_f(u, v) : (u, v) \in p\}.$$

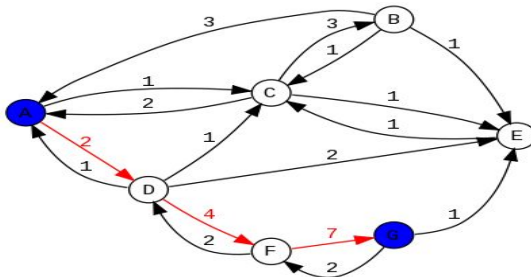
Innymi słowy, ścieżka powiększająca to droga wzdłuż której można zwiększyć przepływ, a przepustowość residualna ścieżki jest to wartość, o jaką maksymalnie można zwiększyć przepływ przez wszystkie krawędzie należące do ścieżki p .

Ścieżka powiększająca - przykład



W tej sieci residualnej, ścieżka powiększająca jest zaznaczona na czerwono.

Ścieżka powiększająca - przykład



W tej sieci residualnej, ścieżka powiększająca jest zaznaczona na czerwono. Jej przepustowość residualna wynosi 2, gdyż jest to najmniejsza z przepustowości residualnych wszystkich krawędzi tej ścieżki.

Wyznaczanie maksymalnego przepływu

Algorytmy wyznaczania maksymalnego przepływu opierają się na tzw. metodzie Forda-Fulkersona, czyli na stopniowym zwiększaniu przepływu wzdłuż każdej drogi prostej od źródła do ujścia. Sednem każdej takiej operacji jest warunek: jeśli istnieje ścieżka powiększająca, zwiększ maksymalnie przepływ wzdłuż tej ścieżki.

Wyznaczanie maksymalnego przepływu

Algorytmy wyznaczania maksymalnego przepływu opierają się na tzw. metodzie Forda-Fulkersona, czyli na stopniowym zwiększaniu przepływu wzdłuż każdej drogi prostej od źródła do ujścia. Sednem każdej takiej operacji jest warunek: jeśli istnieje ścieżka powiększająca, zwiększ maksymalnie przepływ wzdłuż tej ścieżki. Jako przykład, pokażemy jeden (nie najszybszy, ale najprostszy) ze sposobów wyznaczania maksymalnego przepływu: algorytm Edmondsa-Karpa. Jego ideą jest znajdowanie w każdym kroku najkrótszej (pod względem liczby krawędzi) ścieżki powiększającej.

Algorytm Edmondsa-Karpa

Dane: Sieć (V, E) z wyróżnionym źródłem $s \in V$ i ujściem $t \in V$, z funkcją przepustowości c .

Zmienne: funkcja przepływu $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $r : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ - funkcja przepustowości residualnej, p - droga prosta w sieci, a -liczba.

Algorytm Edmondsa-Karpa

Dane: Sieć (V, E) z wyróżnionym źródłem $s \in V$ i ujściem $t \in V$, z funkcją przepustowości c .

Zmienne: funkcja przepływu $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $r : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ - funkcja przepustowości residualnej, p - droga prosta w sieci, a -liczba.

- I. Dla każdej pary $(u, v) \in V \times V$, $f(u, v) := 0$,
 $r(u, v) := c(u, v)$, gdy $(u, v) \in E$ oraz $r(u, v) := 0$ w przeciwnym wypadku. {w każdym momencie będzie $r(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$, gdy $(u, v) \in E$ }

Algorytm Edmondsa-Karpa

Algorytm Edmondsa-Karpa

- II. Dopóki istnieje jakakolwiek ścieżka powiększająca wykonuj:

Algorytm Edmondsa-Karpa

- II. Dopóki istnieje jakakolwiek ścieżka powiększająca wykonuj:
- II.1. Znajdź najkrótszą ze względu na liczbę krawędzi ścieżkę powiększającą (np. z algorytmu przeszukiwania wszerz). Oznacz tę najkrótszą ścieżkę powiększającą przez p .

Algorytm Edmondsa-Karpa

- II. Dopóki istnieje jakakolwiek ścieżka powiększająca wykonuj:
- II.1. Znajdź najkrótszą ze względu na liczbę krawędzi ścieżkę powiększającą (np. z algorytmu przeszukiwania wszerz). Oznacz tę najkrótszą ścieżkę powiększającą przez p .
- II.2. $a := \min\{r(u, v) : (u, v) \text{ należy do } p\}$.

Algorytm Edmondsa-Karpa

- II. Dopóki istnieje jakakolwiek ścieżka powiększająca wykonuj:
- II.1. Znajdź najkrótszą ze względu na liczbę krawędzi ścieżkę powiększającą (np. z algorytmu przeszukiwania wszerz). Oznacz tę najkrótszą ścieżkę powiększającą przez p .
- II.2. $a := \min\{r(u, v) : (u, v) \text{ należy do } p\}$.
- II.3. Dla każdej krawędzi (u, v) należącej do p wykonaj:
 $f(u, v) := f(u, v) + a$, $f(v, u) := f(v, u) - a$,
 $r(u, v) := r(u, v) - a$, $r(v, u) := r(v, u) + a$.

Algorytm Edmondsa-Karpa

- II. Dopóki istnieje jakakolwiek ścieżka powiększająca wykonuj:
- II.1. Znajdź najkrótszą ze względu na liczbę krawędzi ścieżkę powiększającą (np. z algorytmu przeszukiwania wszerz). Oznacz tę najkrótszą ścieżkę powiększającą przez p .
- II.2. $a := \min\{r(u, v) : (u, v) \text{ należy do } p\}$.
- II.3. Dla każdej krawędzi (u, v) należącej do p wykonaj:
 $f(u, v) := f(u, v) + a$, $f(v, u) := f(v, u) - a$,
 $r(u, v) := r(u, v) - a$, $r(v, u) := r(v, u) + a$.
- **Rezultat:** Funkcja zadana przez f na zbiorze E jest funkcją przepływu o maksymalnej wartości dla sieci (V, E) .

Algorytm Edmondsa-Karpa - wstępne uwagi

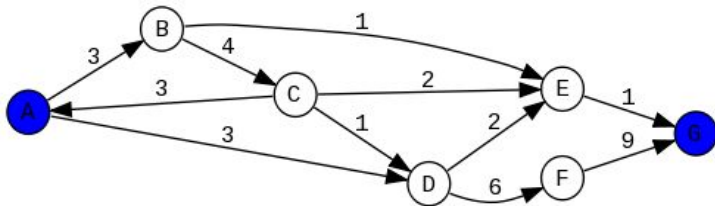
W trakcie wykonywania tego algorytmu, mogą się pojawić możliwości tworzenia „przepływów ujemnych” tj. wybierania ścieżek powiększających w sieciach residualnych zawierających krawędzie, których w oryginalnej sieci nie było. To nic nie przeszkadza - wynik działania algorytmu i tak będzie dobry.

Algorytm Edmondsa-Karpa - wstępne uwagi

W trakcie wykonywania tego algorytmu, mogą się pojawić możliwości tworzenia „przepływów ujemnych” tj. wybierania ścieżek powiększających w sieciach residualnych zawierających krawędzie, których w oryginalnej sieci nie było. To nic nie przeszkadza - wynik działania algorytmu i tak będzie dobry.

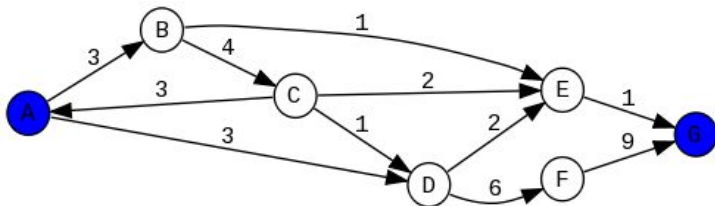
Algorytm ten można przerobić tak, by rozwiązywał też sytuację z wieloma źródłami i ujściami. Wystarczy do sieci dołożyć jedno „superźródło” i jedno „superujście” oraz krawędzie o nieskończonej przepustowości łączące je odpowiednio z wszystkimi źródłami i wszystkimi ujściami, a po przejściu algorytmu Edmondsa-Karpa usunąć te „dodatki”.

Algorytm Edmondsa-Karpa - przykład



Spróbujemy zastosować algorytm Edmondsa-Karpa dla powyższej sieci ze źródłem A i ujściem G . Przedstawię tutaj sposób postępowania przyjęty w ramach tego kursu - obowiązujący na sprawdzianie/egzaminie. W każdym kroku wybieramy ścieżkę powiększającą i sprawdzamy jej przepustowość residualną.

Algorytm Edmondsa-Karpa - przykład

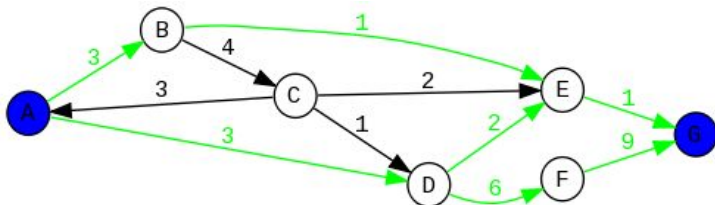


Spróbujemy zastosować algorytm Edmondsa-Karpa dla powyższej sieci ze źródłem A i ujściem G . Przedstawię tutaj sposób postępowania przyjęty w ramach tego kursu - obowiązujący na sprawdzianie/egzaminie. W każdym kroku wybieramy ścieżkę powiększającą i sprawdzamy jej przepustowość residualną.

Działanie algorytmu zapisujemy w takiej tabeli:

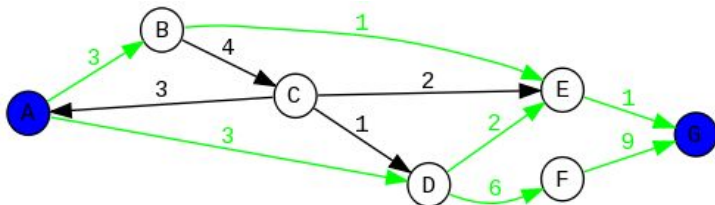
Nr	ścieżka powiększająca	przepustowość ścieżki	alternatywy
1			
2			

Algorytm Edmondsa-Karpa - krok 1



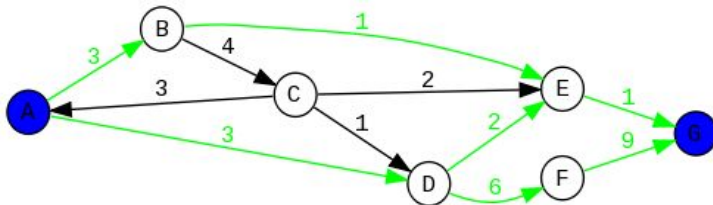
W pierwszym kroku siecią residualną jest po prostu zadana sieć. Możemy wybrać jedną z 3 minimalnych ścieżek powiększających: ABEG, ADEG i ADFG - wszystkie są złożone z 3 krawędzi.

Algorytm Edmondsa-Karpa - krok 1



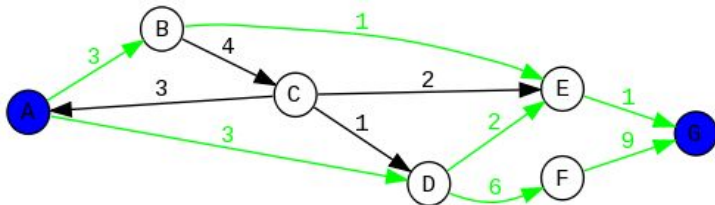
W pierwszym kroku siecią residualną jest po prostu zadana sieć. Możemy wybrać jedną z 3 minimalnych ścieżek powiększających: ABEG, ADEG i ADFG - wszystkie są złożone z 3 krawędzi. Nie możemy wybrać ścieżki np. ABCDFG, bo nie jest ona najkrótsza pod względem liczby krawędzi.

Algorytm Edmonsa-Karpa - krok 1



Założmy, że wybieramy ścieżkę ADEG.

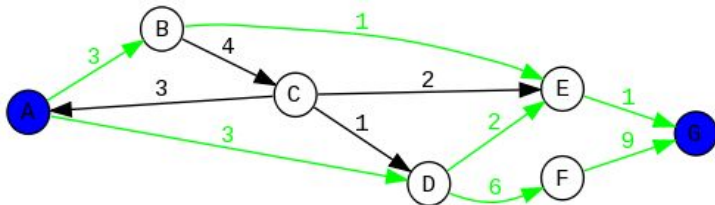
Algorytm Edmonsa-Karpa - krok 1



Założmy, że wybieramy ścieżkę ADEG.

Teraz musimy zmierzyć jej przepustowość residualną - będzie to przepustowość residualna „najwęższej” z jej krawędzi.

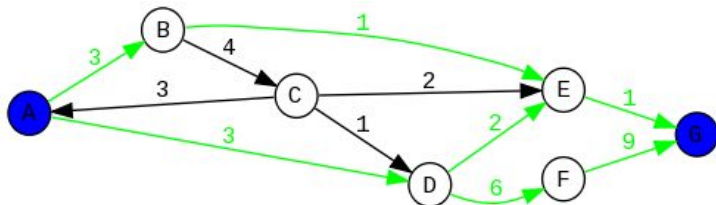
Algorytm Edmonsa-Karpa - krok 1



Założmy, że wybieramy ścieżkę ADEG.

Teraz musimy zmierzyć jej przepustowość residualną - będzie to przepustowość residualna „najwęższej” z jej krawędzi. Krawędź EG ma przepustowość 1, więc taka jest też przepustowość całej ścieżki.

Algorytm Edmonsa-Karpa - krok 1



Założmy, że wybieramy ścieżkę ADEG.

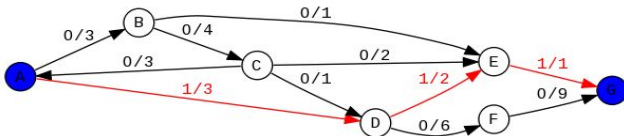
Teraz musimy zmierzyć jej przepustowość residualną - będzie to przepustowość residualna „najwęższej” z jej krawędzi. Krawędź EG ma przepustowość 1, więc taka jest też przepustowość całej ścieżki.

Wyniki 1 kroku zapisujemy w takiej tabeli:

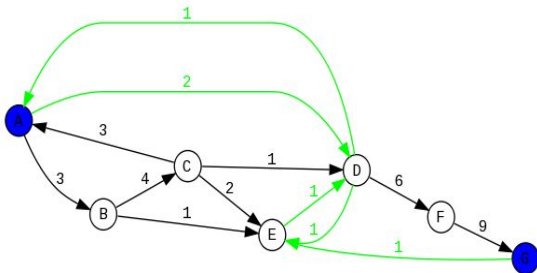
Nr	ścieżka powiększająca	przepustowość ścieżki	alternatywy
1	ADEG	1	ADFG, ABEG
2			

Algorytm Edmonsa-Karpa - krok 1

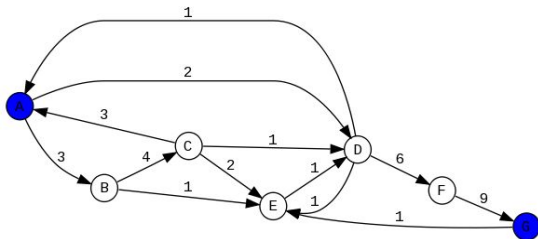
Przepływ z zaznaczoną ostatnią zmianą w tym momencie wygląda tak:



A sieć residualna tak:

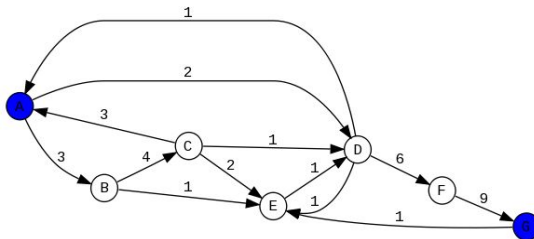


Algorytm Edmondsa-Karpa - krok 2

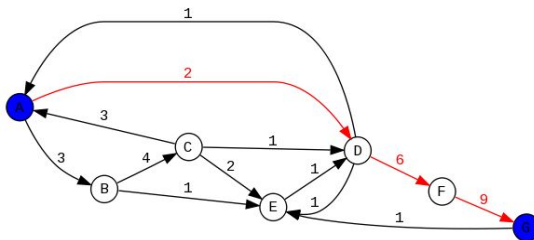


W tej sieci residualnej znajdujemy najkrótszą ścieżkę powiększającą:

Algorytm Edmonsa-Karpa - krok 2



W tej sieci residualnej znajdujemy najkrótszą ścieżkę powiększającą:



Algorytm Edmondsa-Karpa - krok 2

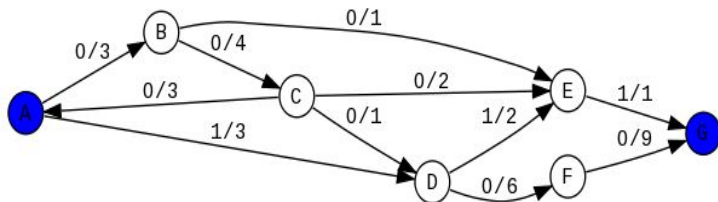
Zapisujemy zatem w tabeli nasz wybór ścieżki ADFG, jej przepustowość residualną (która wynosi 2 ze względu na użycie krawędzi AD) i fakt, że w tym kroku nie mieliśmy wyboru.

Algorytm Edmondsa-Karpa - krok 2

Zapisujemy zatem w tabeli nasz wybór ścieżki ADFG, jej przepustowość residualną (która wynosi 2 ze względu na użycie krawędzi AD) i fakt, że w tym kroku nie mieliśmy wyboru.

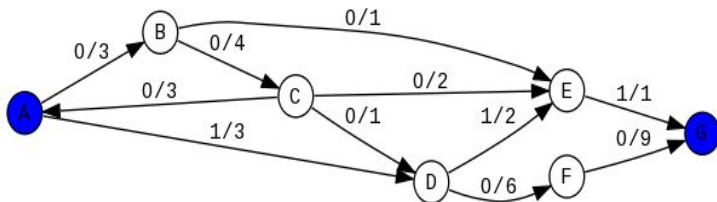
Nr	ścieżka powiększająca	przepustowość ścieżki	alternatywy
1	ADEG	1	ADFG, ABEG
2	ADFG	2	-

Algorytm Edmondsa-Karpa - krok 2

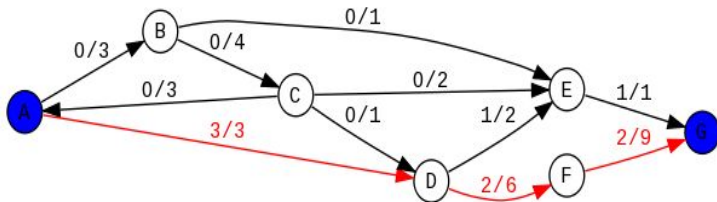


Aktualizujemy też przepływ z wersji górnej do dolnej (przez dodanie 2 wzdłuż ADFG):

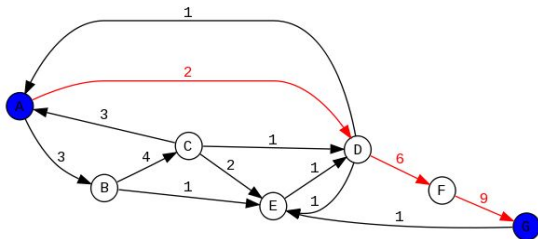
Algorytm Edmondsa-Karpa - krok 2



Aktualizujemy też przepływ z wersji górnej do dolnej (przez dodanie 2 wzdłuż ADFG):

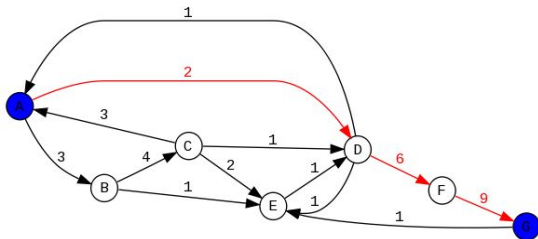


Algorytm Edmondsa-Karpa - krok 2

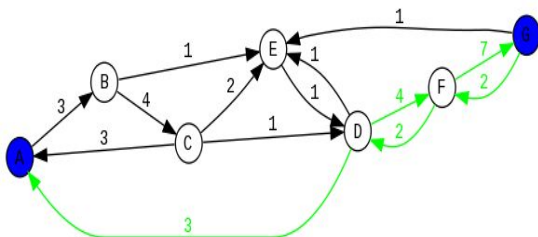


A sieć residualna zmienia się tak:

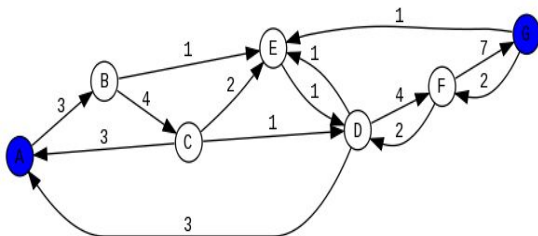
Algorytm Edmonsa-Karpa - krok 2



A sieć residualna zmienia się tak:

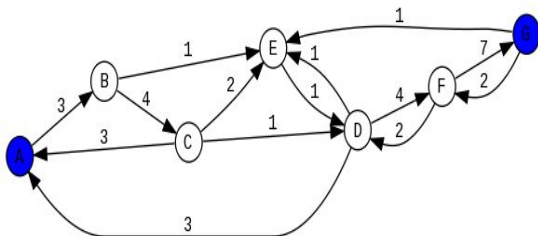


Algorytm Edmondsa-Karpa - krok 3

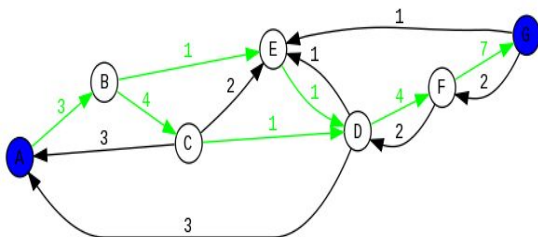


W tej sieci residualnej znajdujemy najkrótsze ścieżki powiększające:

Algorytm Edmonsa-Karpa - krok 3

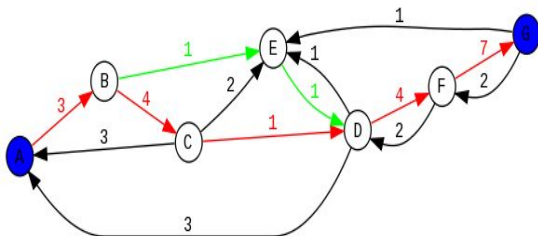


W tej sieci residualnej znajdujemy najkrótsze ścieżki powiększające:



Algorytm Edmonsa-Karpa - krok 3

Tym razem mamy dwie do wyboru, powiedzmy, że wybieramy ABCDFG



Algorytm Edmondsa-Karpa - krok 3

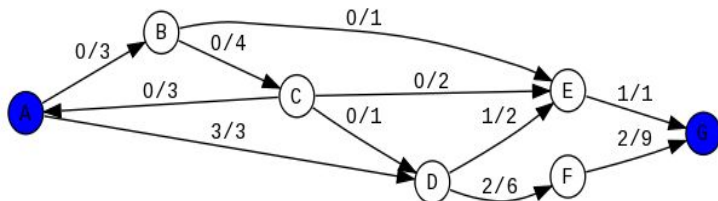
Zapisujemy zatem w tabeli nasz wybór ścieżki, jej przepustowość residualną (która wynosi 1 ze względu na krawędź CD) i możliwy alternatywny wybór.

Algorytm Edmondsa-Karpa - krok 3

Zapisujemy zatem w tabeli nasz wybór ścieżki, jej przepustowość residualną (która wynosi 1 ze względu na krawędź CD) i możliwy alternatywny wybór.

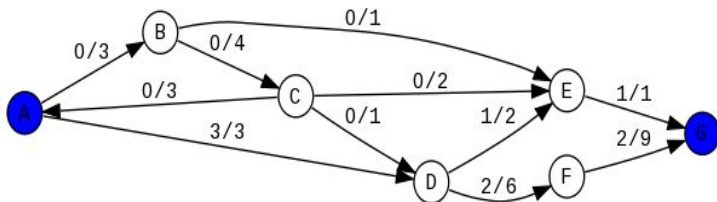
Nr	ścieżka powiększająca	przepustowość ścieżki	alternatywy
3	ABCDFG	1	ABEDFG

Algorytm Edmondsa-Karpa - krok 3

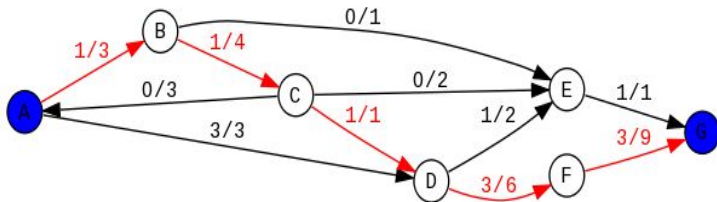


Aktualizujemy też przepływ z wersji górnej do dolnej (przez dodanie 1 wzdłuż ABCDFG):

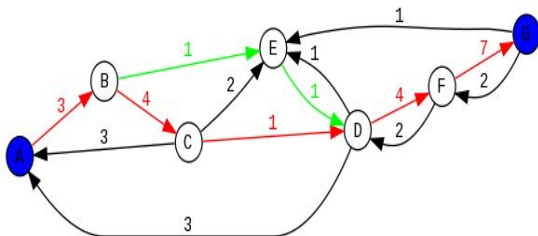
Algorytm Edmonsa-Karpa - krok 3



Aktualizujemy też przepływ z wersji górnej do dolnej (przez dodanie 1 wzdłuż ABCDFG):

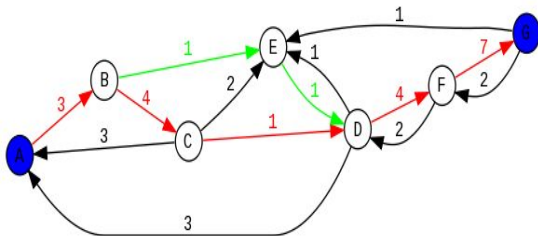


Algorytm Edmonsa-Karpa - krok 3

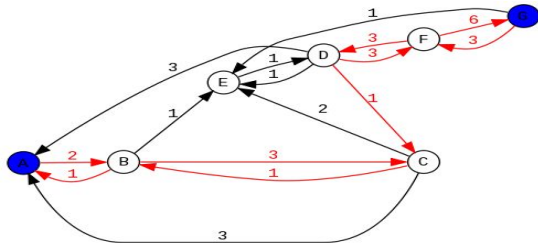


A sieć residualna zmienia się tak:

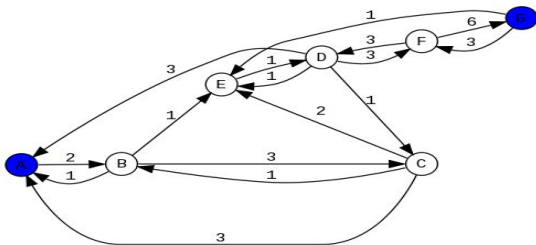
Algorytm Edmonsa-Karpa - krok 3



A sieć residualna zmienia się tak:

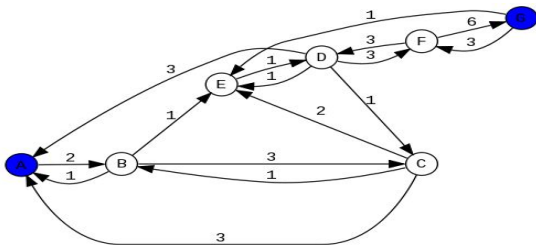


Algorytm Edmonsa-Karpa - krok 4

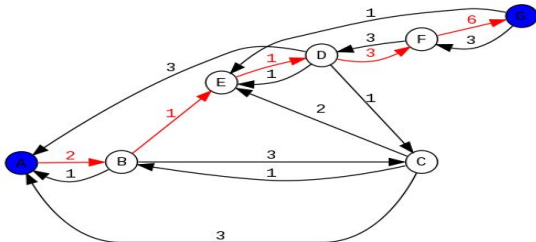


W tej sieci residualnej znajdujemy najkrótszą ścieżkę powiększającą:

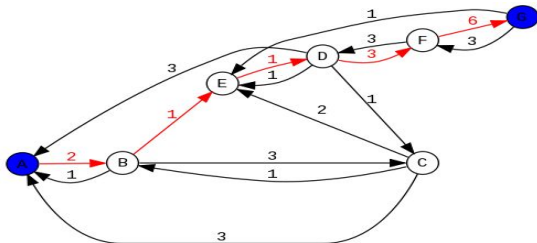
Algorytm Edmonsa-Karpa - krok 4



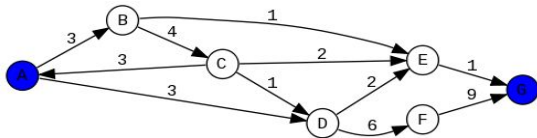
W tej sieci residualnej znajdujemy najkrótszą ścieżkę powiększającą:



Algorytm Edmonsa-Karpa - krok 4



Tym razem znów nie mamy wyboru, ale ciekawe jest, że ta ścieżka (ABEDFG) nie istnieje w wyjściowej sieci, bo krawędź DE jest skierowana w przeciwną stronę niż w tej ścieżce.



Algorytm Edmondsa-Karpa - krok 4

Użycie tej „wirtualnej” krawędzi ED w algorytmie symbolizuje wycofanie się z wykorzystania krawędzi DE w ostatecznym przepływie.

Algorytm Edmondsa-Karpa - krok 4

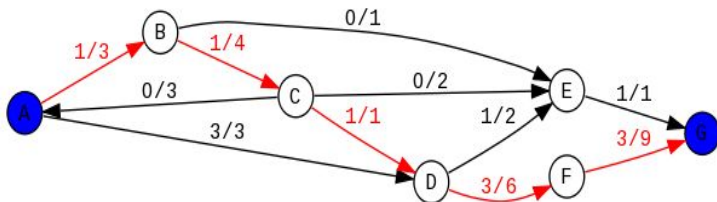
Użycie tej „wirtualnej” krawędzi ED w algorytmie symbolizuje wycofanie się z wykorzystania krawędzi DE w ostatecznym przepływie. Zapisujemy w tabeli nasz wybór ścieżki, jej przepustowość residualną (która wynosi 1 ze względu na krawędź BE) i brak wyboru w tym kroku.

Algorytm Edmondsa-Karpa - krok 4

Użycie tej „wirtualnej” krawędzi ED w algorytmie symbolizuje wycofanie się z wykorzystania krawędzi DE w ostatecznym przepływie. Zapisujemy w tabeli nasz wybór ścieżki, jej przepustowość residualną (która wynosi 1 ze względu na krawędź BE) i brak wyboru w tym kroku.

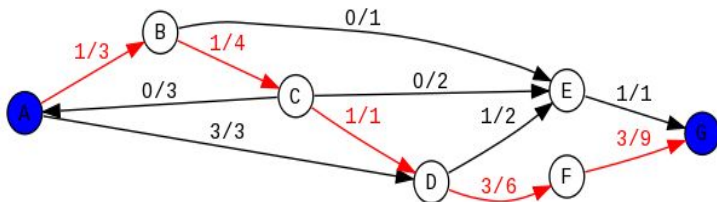
Nr	ścieżka powiększająca	przepustowość ścieżki	alternatywy
4	ABEDFG	1	-

Algorytm Edmondsa-Karpa - krok 4

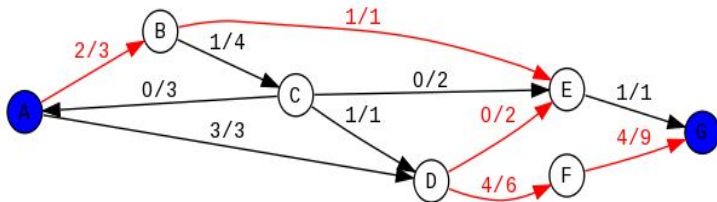


Aktualizujemy też przepływ z wersji górnej do dolnej (przez dodanie 1 wzdłuż ABEDFG):

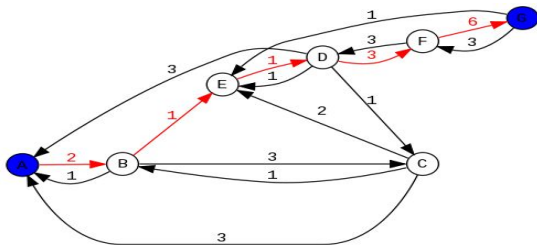
Algorytm Edmonsa-Karpa - krok 4



Aktualizujemy też przepływ z wersji górnej do dolnej (przez dodanie 1 wzdłuż ABEDFG):

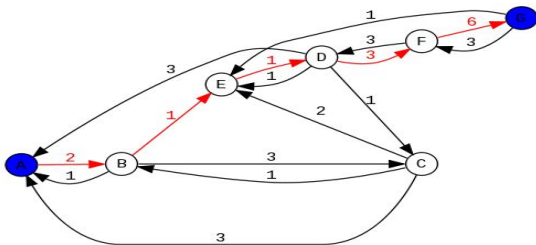


Algorytm Edmondsa-Karpa - krok 4

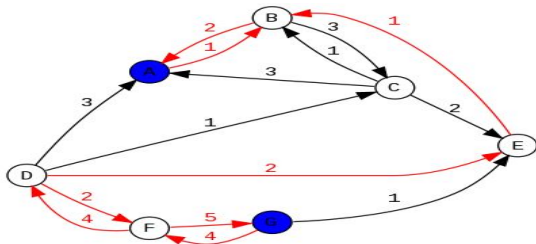


A sieć residualna zmienia się tak:

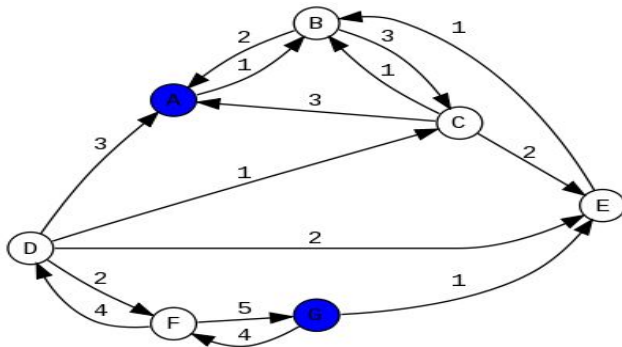
Algorytm Edmondsa-Karpa - krok 4



A sieć residualna zmienia się tak:

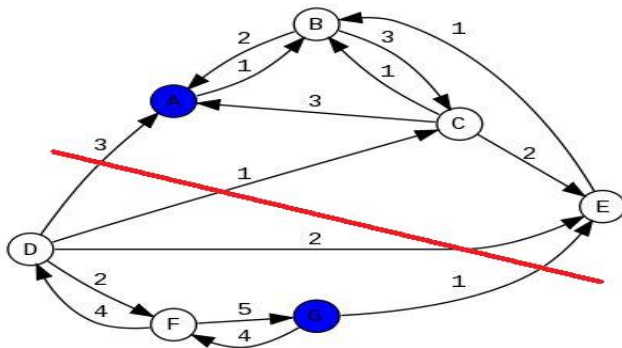


Algorytm Edmondsa-Karpa - zakończenie



Zauważmy, że w tej nowej sieci residualnej nie da się już znaleźć nowej ścieżki powiększającej z A do G.

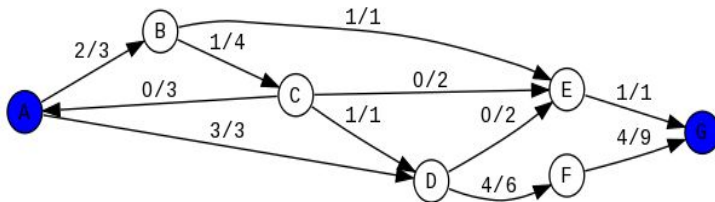
Algorytm Edmondsa-Karpa - zakończenie



Zauważmy, że w tej nowej sieci residualnej nie da się już znaleźć nowej ścieżki powiększającej z A do G. W szczególności, nie da się przejść z części nad czerwoną kreską do części pod nią.

Algorytm Edmondsa-Karpa - zakończenie

Rozwiązaniem zadania jest zatem przepływ maksymalny:



Algorytm Edmondsa-Karpa - zakończenie

...oraz tabela działania algorytmu:

Nr	ścieżka powiększająca	przepustowość ścieżki	alternatywy
1	ADEG	1	ADFG, ABEG
2	ADFG	2	-
3	ABCDFG	1	ABEDFG
4	ABEDFG	1	-

Powinniśmy podać też wartość maksymalnego przepływu.

Algorytm Edmondsa-Karpa - zakończenie

...oraz tabela działania algorytmu:

Nr	ścieżka powiększająca	przepustowość ścieżki	alternatywy
1	ADEG	1	ADFG, ABEG
2	ADFG	2	-
3	ABCDFG	1	ABEDFG
4	ABEDFG	1	-

Powinniśmy podać też wartość maksymalnego przepływu. Możemy odczytać ją z wykresu (sprawdzając ile „wody” wypływa ze źródła lub wpływa do ujścia), albo po prostu dodać liczby z 3 kolumny tabeli działania algorytmu.

Algorytm Edmondsa-Karpa - zakończenie

...oraz tabela działania algorytmu:

Nr	ścieżka powiększająca	przepustowość ścieżki	alternatywy
1	ADEG	1	ADFG, ABEG
2	ADFG	2	-
3	ABCDFG	1	ABEDFG
4	ABEDFG	1	-

Powinniśmy podać też wartość maksymalnego przepływu. Możemy odczytać ją z wykresu (sprawdzając ile „wody” wypływa ze źródła lub wpływa do ujścia), albo po prostu dodać liczby z 3 kolumny tabeli działania algorytmu. Tak, czy inaczej, wychodzi 5.

Algorytm Edmondsa-Karpa - uwagi końcowe

Algorytm Edmondsa-Karpa - uwagi końcowe

- Podsumowując, rozwiązaniem zadania na zastosowanie algorytmu Edmondsa-Karpa jest: narysowanie grafu przepływu maksymalnego, tabeli działania algorytmu i podanie wartości maksymalnego przepływu. Dobrym zwyczajem, pomagającym uchronić się od błędów (szczególnie pominięcia możliwych ścieżek powiększających), jest narysowanie dodatkowo ostatniej postaci sieci residualnej.

Algorytm Edmondsa-Karpa - uwagi końcowe

- Podsumowując, rozwiązaniem zadania na zastosowanie algorytmu Edmondsa-Karpa jest: narysowanie grafu przepływu maksymalnego, tabeli działania algorytmu i podanie wartości maksymalnego przepływu. Dobrym zwyczajem, pomagającym uchronić się od błędów (szczególnie pominięcia możliwych ścieżek powiększających), jest narysowanie dodatkowo ostatniej postaci sieci residualnej.
- Zapis alternatyw w tabeli jest konieczny dla wykazania znajomości algorytmu.