

W tym rozdziale zajmiemy się zagadnieniem: jak policzyć elementy dużych (ale skończonych) zbiorów bez użycia brutalnej siły i wypisania wszystkich elementów.

Przykład. Liczba wszystkich sposobów ułożenia kart w 52-kartowej talii to około 10^{68} . Takiej listy ułożeń nie są w stanie przechowywać nawet największe komputery.

Przykład. Prawdopodobieństwo dyskretne.

I. Powtórka podstaw

Przez $|S|$ oznaczamy liczbę elementów zbioru S (moc S).

Twierdzenie 1 (Prawo sumy). *Niech S i T będą zbiorami skończonymi. Wtedy*

$$|S \cup T| = |S| + |T| - |S \cap T|.$$

W szczególności, jeśli S i T są rozłączne, to $|S \cup T| = |S| + |T|$.

Przykład Ile liczb naturalnych dodatnich, mniejszych lub równych 1000, dzieli się przez 3 lub przez 5?

Twierdzenie 2 (Prawo iloczynu). *Niech S_1, \dots, S_k będą zbiorami skończonymi. Wtedy*

$$|S_1 \times \dots \times S_k| = \prod_{j=1}^k |S_j|.$$

Innymi słowy, jeśli mamy zbiór ciągów długości k , takich, że pierwszy wyraz można wybrać na n_1 sposobów, dla ustalonego pierwszego wyrazu, drugi można wybrać na n_2 sposobów i ogólnie, dla ustalonych j pierwszych wyrazów wyraz $j + 1$ -szy można wybrać na n_{j+1} sposobów, to nasz zbiór ma $n_1 n_2 \dots n_k$ elementów.

Przykład. Na ile sposobów można wylosować 5 kart z talii 52-kartowej ze zwracaniem i bez zwracania?

Przykład. Liczba dróg z jednego do drugiego końca pewnego grafu.

Przykład. Liczba funkcji pomiędzy zbiorami skończonymi. Notacja zbioru funkcji z jednego zbioru do drugiego. Prawo potęgi. Moc zbioru podzbiorów.

Niech będzie dany zbiór niepusty S o n elementach i liczba całkowita $0 \leq r \leq n$.

Definicja 1. *Ciąg r różnych elementów ze zbioru S nazywamy r -elementową wariacją ze zbioru S bez powtórzeń. Moc zbioru takich wariacji oznaczamy przez $P(n, r)$.*

Twierdzenie 3.

$$P(n, r) = \prod_{j=0}^{r-1} (n - j) = \frac{n!}{(n - r)!}.$$

W szczególności, istnieje $P(n, n) = n!$ n -wyrazowych wariacji bez powtórzeń ze zbioru S , które nazywamy permutacjami zbioru S .

Przykład. Dla zbioru J jednostek szyfru jawnego istnieje $|J|!$ funkcji kodujących.f
Wariacje istotne są przy zliczaniu zbiorów, w których porządek ustawienia elementów jest istotny (ciągów). Jeśli porządek nie jest istotny, bardziej przydatne są kombinacje.

Definicja 2. r -elementową kombinacją elementów zbioru S nazywamy jego r -elementowy podzbiór. Liczbę takich podzbiorów oznaczamy $\binom{n}{r}$ (czytamy „ n po r ” lub „ n nad r ”) i nazywamy współczynnikiem dwumianowym Newtona.

Twierdzenie 4.

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n - r)!r!}.$$

Przykład. Ile istnieje ciągów długości n , złożonych z zer i jedynek, takich, że zawiera on dokładnie r jedynek.

Przykład. Ile istnieje możliwych układów kart w pokerze? Ile z nich to pokery, karety, fulle, kolory, strity itp.?

II. Zliczanie wielokrotności

Kolejny przykład wymaga połączenia wiedzy i umiejętności z zakresu kombinatoryki i teorii liczb.

Przykład. Ile jest liczb naturalnych pięciocyfrowych, które są podzielne jednocześnie przez 9 i przez 12?

Najpierw musimy skorzystać z twierdzenia znanego z teorii liczb:

Twierdzenie 5. Dla dodatnich liczb a, b zachodzi:

$$a|c \text{ i } b|c \Leftrightarrow NWW(a, b)|c.$$

W ten sposób sprowadzimy poprzednie pytanie do:

Przykład. Ile jest liczb naturalnych pięciocyfrowych, które są podzielne przez $NWW(9, 12) = 36$?

By sformułować twierdzenie dające odpowiedź na tego typu pytania, potrzebujemy wprawdzie definicji:

Definicja 3. Niech $x \in \mathbb{R}$. Cechą (lub podłogą) z x nazywamy największą liczbę całkowitą nie większą niż x . Oznaczamy ją przez $[x]$.

Twierdzenie 6. Dla dodatniej liczby a istnieje dokładnie

$$\left[\frac{a}{c} \right]$$

liczb dodatnich, podzielnych przez dodatnią liczbę c i nie większych od a .

W szczególności, dla dodatnich liczb a, b , takich, że $a < b$ istnieje dokładnie

$$\left[\frac{b}{c} \right] - \left[\frac{a-1}{c} \right]$$

liczb podzielnych przez dodatnią liczbę c i zawartych w przedziale domkniętym $[a, b]$.

III. Metoda włączeń i wyłączeń

Niech A_1, A_2, \dots, A_n będą zbiorami skończonymi.

Twierdzenie 7 (Zasada włączeń i wyłączeń). Aby znaleźć liczbę elementów zbioru $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$, należy znaleźć liczby wszystkich możliwych przecięć tych zbiorów, dodać do siebie wyniki uzyskane dla przecięć nieparzystej liczby zbiorów, a następnie odjąć wyniki uzyskane dla przecięć parzystej liczby zbiorów. Ścisłej:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| + \sum_{k \neq i \neq j \neq k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots$$

Przykład. Ile jest liczb całkowitych czterocyfrowych, w których co najmniej raz występuje cyfra 0, co najmniej raz cyfra 1 i co najmniej raz cyfra 2?

IV. Wzór pudełkowy

Kolejną metodę zliczania przedstawiam w postaci nieformalnej, bo łatwiej ją w takiej zapamiętać.

Twierdzenie 8 (Wzór pudełkowy). Istnieje $\binom{n+k-1}{k-1}$ sposobów rozmieszczania n identycznych przedmiotów w k rozróżnialnych pudełkach.

Twierdzenie 9 (Wzór pudełkowy - inne sformułowanie). Liczba sposobów wyboru n przedmiotów należących do k rozróżnialnych typów przy założeniu, że powtórzenia są dopuszczalne, wynosi $\binom{n+k-1}{k-1}$.

Przykład. Układanie w nierozróżnialnych pudełkach jest znacznie trudniejsze.

Przykład. Ile liczb ze zbioru liczb całkowitych dodatnich nie większych niż 100000 ma tę własność, że suma ich cyfr wynosi 7? (wskazówka: jak rozmieścić 7 kul w 5 pudełkach?).

Przykład. Na ile sposobów można wybrać 10 monet, mając do wyboru nieograniczony zapas groszy, pięć-, dziesięcio- i pięćdziesięcio-groszówek? (dwa rozwiązania)

V. Podziały

Definicja 4. Podział zbioru S to rodzina jego parami rozłącznych podzbiorów, których sumą jest sam zbiór S . Rozłączne podzbiory nazywamy blokami podziału.

Twierdzenie 10 (O zliczaniu permutacji). Załóżmy, że zbiór n przedmiotów został podzielony na k podzbiorów mających odpowiednio n_1, \dots, n_k elementów ($n = n_1 + \dots + n_k$). Dwa przedmioty są tego samego typu, jeśli należą do tego samego bloku danego podziału. Dwie permutacje są rozróżnialne, jeśli na co najmniej jednym miejscu stoją w nich elementy różnych typów. Wtedy liczba rozróżnialnych permutacji naszego zbioru wynosi:

$$\frac{n!}{n_1!n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

Przykład. Kapelusze zawiera karteczki z kolejnymi literami słów a) PAWEŁ b) BARNABA. Karteczki są pojedynczo wyjmowane z kapelusza i układane w takiej kolejności, w jakiej zostały wyciągnięte. Ile różnych słów (tj. ciągów liter odpowiedniej długości) można w taki sposób otrzymać? Dwa słowa uznajemy za różne, jeśli choć w jednym miejscu mają one różne litery.

Innym zagadnieniem jest zliczanie nie permutacji rozróżnialnych pewnym podziałem, ale samych podziałów.

Definicja 5. Podział uporządkowany zbioru S to ciąg (A_1, \dots, A_k) , którego elementy tworzą podział S . Istotna jest kolejność w jakiej występują zbiory A_i , ale nie kolejność elementów wewnątrz tych zbiorów.

Twierdzenie 11 (O zliczaniu podziałów uporządkowanych). Jeśli dany zbiór ma n elementów i jeśli $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$, to istnieje

$$\frac{n!}{n_1!n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

podziałów uporządkowanych (A_1, \dots, A_k) tego zbioru takich, że $|A_i| = n_i$ dla $i = 1, \dots, k$.

Przykład. Na ile sposobów można spośród 20-osobowej grupy utworzyć 3 rozłączne komisje, jeśli muszą mieć, odpowiednio, 3, 5 i 7 członków?

Przykład. Rozdanie brydżowe to podział uporządkowany talii 52 kart na 4 zbiory, po 13 kart w każdym.

a) Ile jest możliwych rozdań brydżowych?

b) Ile jest rozdań brydżowych takich, że każdy z graczy otrzyma jednego asa?