4. Kombinatoryka: zliczanie elementów zbioru

Grzegorz Kosiorowski

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

1 Powtórka podstaw

2 Zasada włączeń i wyłączeń

3 Wzór pudełkowy

4 Podziały

Motywacja

W tym rozdziale zajmiemy się zagadnieniem: jak policzyć elementy dużych (ale skończonych) zbiorów bez użycia brutalnej siły i wypisania wszystkich elementów.

Motywacja

W tym rozdziale zajmiemy się zagadnieniem: jak policzyć elementy dużych (ale skończonych) zbiorów bez użycia brutalnej siły i wypisania wszystkich elementów.

Przykład. Liczba wszystkich sposobów ułożenia kart w 52-kartowej talii to około 10^{68}.

Motywacja

W tym rozdziale zajmiemy się zagadnieniem: jak policzyć elementy dużych (ale skończonych) zbiorów bez użycia brutalnej siły i wypisania wszystkich elementów.

Przykład. Liczba wszystkich sposobów ułożenia kart w 52-kartowej talii to około 10^{68}. To jest zdecydowanie większa liczba, niż liczba atomów, z których się składa Ziemia.

Motywacja

W tym rozdziale zajmiemy się zagadnieniem: jak policzyć elementy dużych (ale skończonych) zbiorów bez użycia brutalnej siły i wypisania wszystkich elementów.

Przykład. Liczba wszystkich sposobów ułożenia kart w 52-kartowej talii to około 10^{68}. To jest zdecydowanie większa liczba, niż liczba atomów, z których się składa Ziemia. Takiej listy ułożeń nie są w stanie przechowywać nawet największe komputery.

Motywacja

W tym rozdziale zajmiemy się zagadnieniem: jak policzyć elementy dużych (ale skończonych) zbiorów bez użycia brutalnej siły i wypisania wszystkich elementów.

Przykład. Liczba wszystkich sposobów ułożenia kart w 52-kartowej talii to około 10^{68}. To jest zdecydowanie większa liczba, niż liczba atomów, z których się składa Ziemia. Takiej listy ułożeń nie są w stanie przechowywać nawet największe komputery.A jednak, pisząc program do jakiejś gry karcianej (np. pokera), musimy jakoś obliczyć prawdopodobieństwa powstania różnych układów, do czego teoretycznie takiej wielkości liczby są potrzebne (przypomnieć sobie definicję prawdopodobieństwa dyskretnego).

Motywacja

W tym rozdziale zajmiemy się zagadnieniem: jak policzyć elementy dużych (ale skończonych) zbiorów bez użycia brutalnej siły i wypisania wszystkich elementów.

Przykład. Liczba wszystkich sposobów ułożenia kart w 52-kartowej talii to około 10^{68}. To jest zdecydowanie większa liczba, niż liczba atomów, z których się składa Ziemia. Takiej listy ułożeń nie są w stanie przechowywać nawet największe komputery.A jednak, pisząc program do jakiejś gry karcianej (np. pokera), musimy jakoś obliczyć prawdopodobieństwa powstania różnych układów, do czego teoretycznie takiej wielkości liczby są potrzebne (przypomnieć sobie definicję prawdopodobieństwa dyskretnego).

Pewne podstawowe techniki takich obliczeń znamy ze szkoły (kombinatoryka). Zaczniemy od ich przypomnienia.

Moc zbioru

Moc zbioru

Mocą zbioru S nazywamy liczbę elementów tego zbioru. Oznaczamy ją $|S|$.

Moc zbioru

Moc zbioru

Mocą zbioru S nazywamy liczbę elementów tego zbioru. Oznaczamy ją $|S|$.

Na tym wykładzie będziemy się zajmować zbiorami o skończonej mocy (skończonymi), chyba, że wyraźnie będzie napisane inaczej.

Przykład: zliczanie wielokrotności

Pierwszy przykład wymaga połączenia wiedzy i umiejętności z zakresu kombinatoryki i teorii liczb.

Zadanie

Ile jest liczb naturalnych pięciocyfrowych, które są podzielne jednocześnie przez 9 i przez 12?

Przykład: zliczanie wielokrotności

Pierwszy przykład wymaga połączenia wiedzy i umiejętności z zakresu kombinatoryki i teorii liczb.

Zadanie

Ile jest liczb naturalnych pięciocyfrowych, które są podzielne jednocześnie przez 9 i przez 12?

Najpierw musimy skorzystać z twierdzenia znanego z teorii liczb:

Twierdzenie

Dla dodatnich liczb a, b zachodzi:

$$a|c \text{ i } b|c \Leftrightarrow NWW(a, b)|c.$$

Zliczanie wielokrotności - przykład

Twierdzenie

Dla dodatnich liczb a, b zachodzi:

$$a|c \text{ i } b|c \Leftrightarrow NWW(a,b)|c.$$

Zliczanie wielokrotności - przykład

Twierdzenie

Dla dodatnich liczb a, b zachodzi:

$$a|c \text{ i } b|c \Leftrightarrow NWW(a, b)|c.$$

W ten sposób sprowadzimy nasze zagadnienie do:

Zadanie

Ile jest liczb naturalnych pięciocyfrowych, które są podzielne przez $NWW(9, 12) = 36$?

Cecha z liczby

By sformułować twierdzenie dające odpowiedź na tego typu pytania, potrzebujemy wpierw definicji:

Cecha (podłoga)

Niech $x \in \mathbb{R}$. *Cechą* (lub *podłogą*) z x nazywamy największą liczbę całkowitą nie większą niż x. Oznaczamy ją przez $[x]$.

Cecha z liczby

By sformułować twierdzenie dające odpowiedź na tego typu pytania, potrzebujemy wpierw definicji:

Cecha (podłoga)

Niech $x \in \mathbb{R}$. *Cechą* (lub *podłogą*) z x nazywamy największą liczbę całkowitą nie większą niż x. Oznaczamy ją przez $[x]$.

Na przykład:
$[\pi] =$

Cecha z liczby

By sformułować twierdzenie dające odpowiedź na tego typu pytania, potrzebujemy wpierw definicji:

Cecha (podłoga)

Niech $x \in \mathbb{R}$. *Cechą* (lub *podłogą*) z x nazywamy największą liczbę całkowitą nie większą niż x. Oznaczamy ją przez $[x]$.

Na przykład:
$[\pi] = 3$, $[\frac{19}{4}] =$

Cecha z liczby

By sformułować twierdzenie dające odpowiedź na tego typu pytania, potrzebujemy wpierw definicji:

Cecha (podłoga)

Niech $x \in \mathbb{R}$. *Cechą* (lub *podłogą*) z x nazywamy największą liczbę całkowitą nie większą niż x. Oznaczamy ją przez $[x]$.

Na przykład:
$[\pi] = 3$, $[\frac{19}{4}] = 4$, $[5] =$

Cecha z liczby

By sformułować twierdzenie dające odpowiedź na tego typu pytania, potrzebujemy wpierw definicji:

Cecha (podłoga)

Niech $x \in \mathbb{R}$. *Cechą* (lub *podłogą*) z x nazywamy największą liczbę całkowitą nie większą niż x. Oznaczamy ją przez $[x]$.

Na przykład:
$[\pi] = 3$, $[\frac{19}{4}] = 4$, $[5] = 5$, $[-1,5] =$

Cecha z liczby

By sformułować twierdzenie dające odpowiedź na tego typu pytania, potrzebujemy wpierw definicji:

Cecha (podłoga)

Niech $x \in \mathbb{R}$. *Cechą* (lub *podłogą*) z x nazywamy największą liczbę całkowitą nie większą niż x. Oznaczamy ją przez $[x]$.

Na przykład:
$[\pi] = 3$, $[\frac{19}{4}] = 4$, $[5] = 5$, $[-1,5] = -2$.

Zliczanie wielokrotności - ogólne twierdzenie

Tego typu zagadnienia można rozwiązać za pomocą następującego twierdzenia:

Twierdzenie o zliczaniu wielokrotności

Dla dodatniej liczby a istnieje dokładnie

$$[\frac{a}{c}]$$

liczb dodatnich, podzielnych przez dodatnią liczbę c i nie większych od a.

W szczególności, dla dodatnich liczb a, b, takich, że $a < b$ istnieje dokładnie

$$[\frac{b}{c}] - [\frac{a-1}{c}]$$

liczb podzielnych przez dodatnią liczbę c i zawartych w przedziale domkniętym $[a, b]$.

Zliczanie wielokrotności - ogólne twierdzenie

Tego typu zagadnienia można rozwiązać za pomocą następującego twierdzenia:

Twierdzenie o zliczaniu wielokrotności

Dla dodatniej liczby a istnieje dokładnie

$$[\frac{a}{c}]$$

liczb dodatnich, podzielnych przez dodatnią liczbę c i nie większych od a.

W szczególności, dla dodatnich liczb a, b, takich, że $a < b$ istnieje dokładnie

$$[\frac{b}{c}] - [\frac{a-1}{c}]$$

liczb podzielnych przez dodatnią liczbę c i zawartych w przedziale domkniętym $[a, b]$.

Zliczanie wielokrotności - przykład

Teraz możemy rozwiązać nasze zadanie.

Zadanie

Ile jest liczb naturalnych pięciocyfrowych, które są podzielne przez 36?

Zliczanie wielokrotności - przykład

Teraz możemy rozwiązać nasze zadanie.

Zadanie

Ile jest liczb naturalnych pięciocyfrowych, które są podzielne przez 36?

Liczby pięciocyfrowe to inaczej liczby naturalne z przedziału $[a, b] = [10000, 99999]$.

Zliczanie wielokrotności - przykład

Teraz możemy rozwiązać nasze zadanie.

Zadanie

Ile jest liczb naturalnych pięciocyfrowych, które są podzielne przez 36?

Liczby pięciocyfrowe to inaczej liczby naturalne z przedziału $[a, b] = [10000, 99999]$. Zatem, zgodnie z twierdzeniem o zliczaniu podzielności, poprawny wynik to:

$$[\frac{b}{c}] - [\frac{a-1}{c}] =$$

Zliczanie wielokrotności - przykład

Teraz możemy rozwiązać nasze zadanie.

Zadanie

Ile jest liczb naturalnych pięciocyfrowych, które są podzielne przez 36?

Liczby pięciocyfrowe to inaczej liczby naturalne z przedziału $[a, b] = [10000, 99999]$. Zatem, zgodnie z twierdzeniem o zliczaniu podzielności, poprawny wynik to:

$$[\frac{b}{c}] - [\frac{a-1}{c}] = \left[\frac{99999}{36}\right] - \left[\frac{9999}{36}\right] =$$

Zliczanie wielokrotności - przykład

Teraz możemy rozwiązać nasze zadanie.

Zadanie

Ile jest liczb naturalnych pięciocyfrowych, które są podzielne przez 36?

Liczby pięciocyfrowe to inaczej liczby naturalne z przedziału $[a, b] = [10000, 99999]$. Zatem, zgodnie z twierdzeniem o zliczaniu podzielności, poprawny wynik to:

$$[\frac{b}{c}] - [\frac{a-1}{c}] = \left[\frac{99999}{36}\right] - \left[\frac{9999}{36}\right] = 2777 - 277 = 2500.$$

Prawo sumy

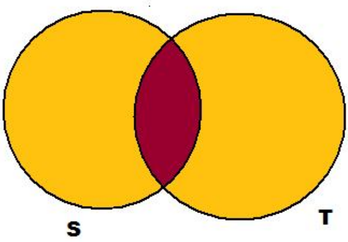
Prawo sumy

Niech S i T będą zbiorami skończonymi. Wtedy

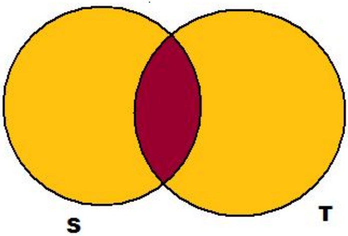
$$|S \cup T| = |S| + |T| - |S \cap T|.$$

W szczególności, jeśli S i T są rozłączne, to $|S \cup T| = |S| + |T|$.

Prawo sumy - objaśnienie

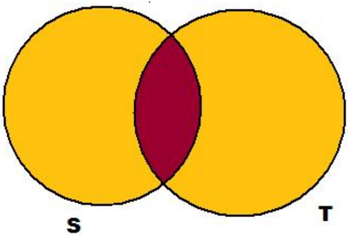


Prawo sumy - objaśnienie



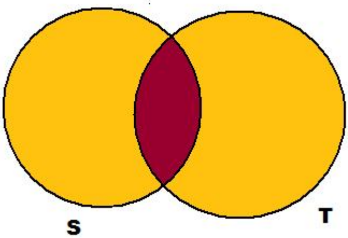
Aby obliczyć liczbę elementów na zakolorowanym obszarze, trzeba policzyć każdy element $S \cup T$ dokładnie raz.

Prawo sumy - objaśnienie



Aby obliczyć liczbę elementów na zakolorowanym obszarze, trzeba policzyć każdy element $S \cup T$ dokładnie raz. Gdybyśmy liczyli $|S| + |T|$, to faktycznie policzylibyśmy po raz elementy z pomarańczowego obszaru, ale elementy z czerwonego obszaru (czyli $S \cap T$) policzylibyśmy dwa razy - raz jako elementy S, a raz jako elementy T.

Prawo sumy - objaśnienie



Aby obliczyć liczbę elementów na zakolorowanym obszarze, trzeba policzyć każdy element $S \cup T$ dokładnie raz. Gdybyśmy liczyli $|S| + |T|$, to faktycznie policzylibyśmy po raz elementy z pomarańczowego obszaru, ale elementy z czerwonego obszaru (czyli $S \cap T$) policzylibyśmy dwa razy - raz jako elementy S, a raz jako elementy T. Dlatego, żeby otrzymać właściwy końcowy wynik, musimy od $|S| + |T|$ odjąć jeden raz $|S \cap T|$.

Prawo sumy - przykład

Zadanie

Ile liczb naturalnych dodatnich, mniejszych lub równych 1000, dzieli się przez 3 lub przez 5?

Prawo sumy - przykład

Zadanie

Ile liczb naturalnych dodatnich, mniejszych lub równych 1000, dzieli się przez 3 lub przez 5?

Rozważmy dla zbiory: A_1 -zbiór liczb mniejszych lub równych 1000, podzielnych przez 3 i A_2 -zbiór liczb mniejszych lub równych 1000, podzielnych przez 5.

Prawo sumy - przykład

Zadanie

Ile liczb naturalnych dodatnich, mniejszych lub równych 1000, dzieli się przez 3 lub przez 5?

Rozważmy dla zbiory: A_1 -zbiór liczb mniejszych lub równych 1000, podzielnych przez 3 i A_2 -zbiór liczb mniejszych lub równych 1000, podzielnych przez 5.
Zgodnie z twierdzeniem o zliczaniu wielokrotności

Prawo sumy - przykład

Zadanie

Ile liczb naturalnych dodatnich, mniejszych lub równych 1000, dzieli się przez 3 lub przez 5?

Rozważmy dla zbiory: A_1 -zbiór liczb mniejszych lub równych 1000, podzielnych przez 3 i A_2 -zbiór liczb mniejszych lub równych 1000, podzielnych przez 5.
Zgodnie z twierdzeniem o zliczaniu wielokrotności
$|A_1| = [\frac{1000}{3}] = 333$,

Prawo sumy - przykład

Zadanie

Ile liczb naturalnych dodatnich, mniejszych lub równych 1000, dzieli się przez 3 lub przez 5?

Rozważmy dla zbiory: A_1 -zbiór liczb mniejszych lub równych 1000, podzielnych przez 3 i A_2 -zbiór liczb mniejszych lub równych 1000, podzielnych przez 5.
Zgodnie z twierdzeniem o zliczaniu wielokrotności $|A_1| = [\frac{1000}{3}] = 333$, a $|A_2| = [\frac{1000}{5}] = 200$.

Prawo sumy - przykład

Teraz łatwo można popełnić błąd twierdząc, że skoro $A = A_1 \cup A_2$, to $|A| = |A_1| + |A_2|$.

Prawo sumy - przykład

Teraz łatwo można popełnić błąd twierdząc, że skoro $A = A_1 \cup A_2$, to $|A| = |A_1| + |A_2|$.Jak widzimy w prawie sumy, tak nie jest, gdyż zbiory A_1 i A_2 nie są rozłączne (np. liczba 300 należy do obydwu zbiorów, więc licząc tak jak w poprzednim zdaniu policzylibyśmy ją dwa razy!).

Prawo sumy - przykład

Teraz łatwo można popełnić błąd twierdząc, że skoro $A = A_1 \cup A_2$, to $|A| = |A_1| + |A_2|$.Jak widzimy w prawie sumy, tak nie jest, gdyż zbiory A_1 i A_2 nie są rozłączne (np. liczba 300 należy do obydwu zbiorów, więc licząc tak jak w poprzednim zdaniu policzylibyśmy ją dwa razy!). Żeby przeprowadzić poprawne obliczenia, potrzebujemy obliczyć moc zbioru $A_1 \cap A_2$. Są to liczby mniejsze od 1000, podzielne przez 3 i 5, czyli podzielne przez

Prawo sumy - przykład

Teraz łatwo można popełnić błąd twierdząc, że skoro $A = A_1 \cup A_2$, to $|A| = |A_1| + |A_2|$.Jak widzimy w prawie sumy, tak nie jest, gdyż zbiory A_1 i A_2 nie są rozłączne (np. liczba 300 należy do obydwu zbiorów, więc licząc tak jak w poprzednim zdaniu policzylibyśmy ją dwa razy!). Żeby przeprowadzić poprawne obliczenia, potrzebujemy obliczyć moc zbioru $A_1 \cap A_2$. Są to liczby mniejsze od 1000, podzielne przez 3 i 5, czyli podzielne przez $NWW(3,5) = 15$.

Prawo sumy - przykład

Teraz łatwo można popełnić błąd twierdząc, że skoro $A = A_1 \cup A_2$, to $|A| = |A_1| + |A_2|$.Jak widzimy w prawie sumy, tak nie jest, gdyż zbiory A_1 i A_2 nie są rozłączne (np. liczba 300 należy do obydwu zbiorów, więc licząc tak jak w poprzednim zdaniu policzylibyśmy ją dwa razy!). Żeby przeprowadzić poprawne obliczenia, potrzebujemy obliczyć moc zbioru $A_1 \cap A_2$. Są to liczby mniejsze od 1000, podzielne przez 3 i 5, czyli podzielne przez $NWW(3,5) = 15$. Zgodnie z twierdzeniem o zliczaniu wielokrotności $|A_1 \cap A_2| = [\frac{1000}{15}] = 66$.

Prawo sumy - przykład

Teraz łatwo można popełnić błąd twierdząc, że skoro $A = A_1 \cup A_2$, to $|A| = |A_1| + |A_2|$.Jak widzimy w prawie sumy, tak nie jest, gdyż zbiory A_1 i A_2 nie są rozłączne (np. liczba 300 należy do obydwu zbiorów, więc licząc tak jak w poprzednim zdaniu policzylibyśmy ją dwa razy!).
Żeby przeprowadzić poprawne obliczenia, potrzebujemy obliczyć moc zbioru $A_1 \cap A_2$. Są to liczby mniejsze od 1000, podzielne przez 3 i 5, czyli podzielne przez $NWW(3,5) = 15$. Zgodnie z twierdzeniem o zliczaniu wielokrotności $|A_1 \cap A_2| = [\frac{1000}{15}] = 66$.
Zgodnie z prawem sumy można zatem obliczyć:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| =$$

Prawo sumy - przykład

Teraz łatwo można popełnić błąd twierdząc, że skoro $A = A_1 \cup A_2$, to $|A| = |A_1| + |A_2|$.Jak widzimy w prawie sumy, tak nie jest, gdyż zbiory A_1 i A_2 nie są rozłączne (np. liczba 300 należy do obydwu zbiorów, więc licząc tak jak w poprzednim zdaniu policzylibyśmy ją dwa razy!).
Żeby przeprowadzić poprawne obliczenia, potrzebujemy obliczyć moc zbioru $A_1 \cap A_2$. Są to liczby mniejsze od 1000, podzielne przez 3 i 5, czyli podzielne przez $NWW(3, 5) = 15$. Zgodnie z twierdzeniem o zliczaniu wielokrotności $|A_1 \cap A_2| = [\frac{1000}{15}] = 66$.
Zgodnie z prawem sumy można zatem obliczyć:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| = 333 + 200 - 66 = 467.$$

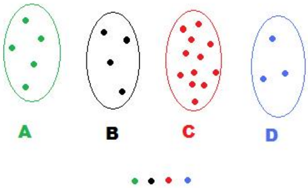
Prawo iloczynu

Niech $S_1, \ldots, S_k$ będą zbiorami skończonymi. Wtedy

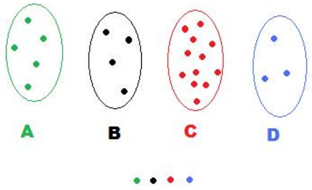
$$|S_1 \times \ldots \times S_k| = \prod_{j=1}^{k} |S_j|.$$

Innymi słowy, jeśli mamy zbiór ciągów długości k, takich, że pierwszy wyraz można wybrać na n_1 sposobów, dla ustalonego pierwszego wyrazu, drugi można wybrać na n_2 sposobów i ogólnie, dla ustalonych j pierwszych wyrazów wyraz $j+1$-szy można wybrać na n_{j+1} sposobów, to nasz zbiór ma $n_1 n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ elementów.

Prawo iloczynu - interpretacja

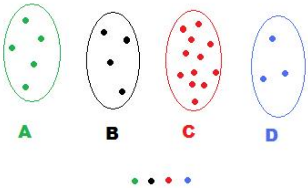


Prawo iloczynu - interpretacja



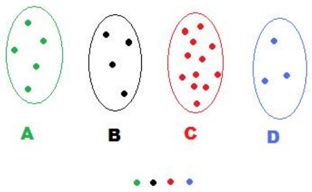
Prawo iloczynu stosujemy do obliczania liczby ciągów, czyli w sytuacji, gdy pewnych wyborów dokonujemy sekwencyjnie (możemy założyć, że wykonujemy je w pewnej kolejności czasowej).

Prawo iloczynu - interpretacja



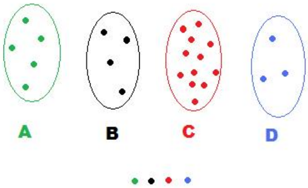
Prawo iloczynu stosujemy do obliczania liczby ciągów, czyli w sytuacji, gdy pewnych wyborów dokonujemy sekwencyjnie (możemy założyć, że wykonujemy je w pewnej kolejności czasowej). Na przykład, jeśli chcemy wybrać po jednym elemencie z każdego z powyżej przedstawionych zbiorów, to możemy sobie założyć, że wybieramy je w kolejności ABCD (jak w ciągu kropek na dole rysunku), możemy zastosować prawo iloczynu i moc zbioru takich ciągów będzie równa $|A| \cdot |B| \cdot |C| \cdot |D|$.

Prawo iloczynu - interpretacja



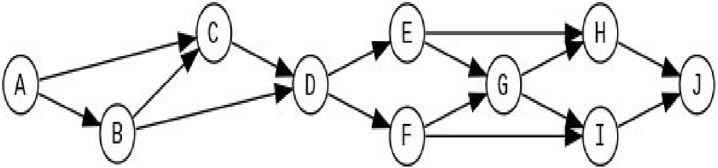
Prawo iloczynu stosujemy do obliczania liczby ciągów, czyli w sytuacji, gdy pewnych wyborów dokonujemy sekwencyjnie (możemy założyć, że wykonujemy je w pewnej kolejności czasowej). Na przykład, jeśli chcemy wybrać po jednym elemencie z każdego z powyżej przedstawionych zbiorów, to możemy sobie założyć, że wybieramy je w kolejności ABCD (jak w ciągu kropek na dole rysunku), możemy zastosować prawo iloczynu i moc zbioru takich ciągów będzie równa $|A| \cdot |B| \cdot |C| \cdot |D|$.Podobnie byłoby, gdyby kolejność była z góry ustalona w tekście zadania.

Prawo iloczynu - interpretacja



Prawo iloczynu stosujemy do obliczania liczby ciągów, czyli w sytuacji, gdy pewnych wyborów dokonujemy sekwencyjnie (możemy założyć, że wykonujemy je w pewnej kolejności czasowej). Na przykład, jeśli chcemy wybrać po jednym elemencie z każdego z powyżej przedstawionych zbiorów, to możemy sobie założyć, że wybieramy je w kolejności ABCD (jak w ciągu kropek na dole rysunku), możemy zastosować prawo iloczynu i moc zbioru takich ciągów będzie równa $|A| \cdot |B| \cdot |C| \cdot |D|$.Podobnie byłoby, gdyby kolejność była z góry ustalona w tekście zadania.

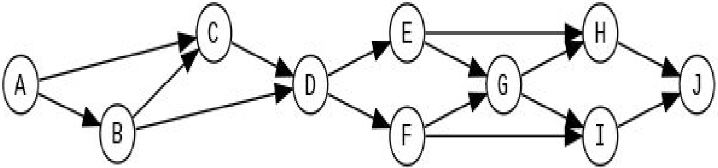
Prawo iloczynu - przykład



Zadanie

Na ile sposobów w powyższym grafie można przejść (w kierunku strzałek) z wierzchołka A do wierzchołka J?

Prawo iloczynu - przykład

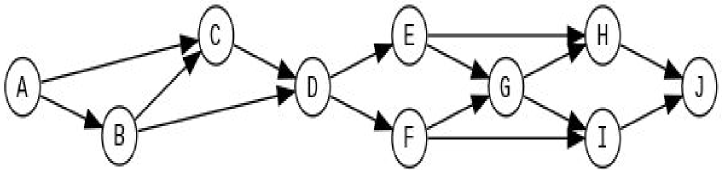


Zadanie

Na ile sposobów w powyższym grafie można przejść (w kierunku strzałek) z wierzchołka A do wierzchołka J?

Zauważmy, że każdą drogę z A do J można podzielić na dwie części wierzchołkiem D.

Prawo iloczynu - przykład

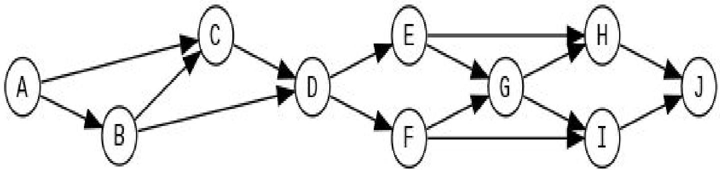


Zadanie

Na ile sposobów w powyższym grafie można przejść (w kierunku strzałek) z wierzchołka A do wierzchołka J?

Zauważmy, że każdą drogę z A do J można podzielić na dwie części wierzchołkiem D. Są 3 sposoby dojścia z A do D

Prawo iloczynu - przykład

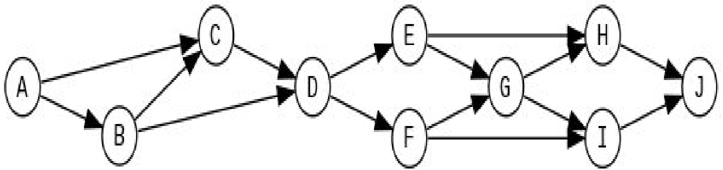


Zadanie

Na ile sposobów w powyższym grafie można przejść (w kierunku strzałek) z wierzchołka A do wierzchołka J?

Zauważmy, że każdą drogę z A do J można podzielić na dwie części wierzchołkiem D. Są 3 sposoby dojścia z A do D i 6 sposobów dojścia z D do J.

Prawo iloczynu - przykład

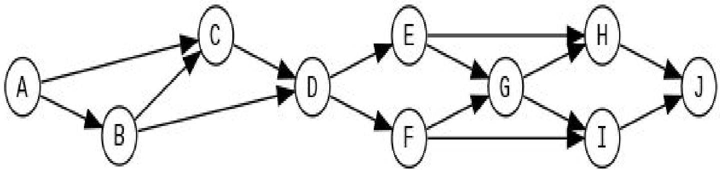


Zadanie

Na ile sposobów w powyższym grafie można przejść (w kierunku strzałek) z wierzchołka A do wierzchołka J?

Zauważmy, że każdą drogę z A do J można podzielić na dwie części wierzchołkiem D. Są 3 sposoby dojścia z A do D i 6 sposobów dojścia z D do J. Możemy zatem patrzeć na zagadnienie w ten sposób: wybieramy jeden sposób dojścia z A do D, **a następnie** jeden sposób dojścia z D do J.

Prawo iloczynu - przykład



Zadanie

Na ile sposobów w powyższym grafie można przejść (w kierunku strzałek) z wierzchołka A do wierzchołka J?

Zauważmy, że każdą drogę z A do J można podzielić na dwie części wierzchołkiem D. Są 3 sposoby dojścia z A do D i 6 sposobów dojścia z D do J. Możemy zatem patrzeć na zagadnienie w ten sposób: wybieramy jeden sposób dojścia z A do D, **a następnie** jeden sposób dojścia z D do J. Zgodnie z prawem iloczynu takich sposobów jest $3 \cdot 6 = 18$.

Prawo iloczynu - ważny przykład

Zadanie

Niech A i B będą zbiorami skończonymi. Ile można zdefiniować funkcji $f : A \longrightarrow B$?

Prawo iloczynu - ważny przykład

Zadanie

Niech A i B będą zbiorami skończonymi. Ile można zdefiniować funkcji $f : A \to B$?

Z definicji funkcji dla każdego argumentu $a \in A$ musimy wybrać $b \in B$.

Prawo iloczynu - ważny przykład

Zadanie

Niech A i B będą zbiorami skończonymi. Ile można zdefiniować funkcji $f : A \to B$?

Z definicji funkcji dla każdego argumentu $a \in A$ musimy wybrać $b \in B$. Czyli dokonujemy $|A|$ wyborów, a w każdym kroku wybieramy spośród $|B|$ możliwości.

Prawo iloczynu - ważny przykład

Zadanie

Niech A i B będą zbiorami skończonymi. Ile można zdefiniować funkcji $f : A \to B$?

Z definicji funkcji dla każdego argumentu $a \in A$ musimy wybrać $b \in B$. Czyli dokonujemy $|A|$ wyborów, a w każdym kroku wybieramy spośród $|B|$ możliwości. Zatem, zgodnie z prawem iloczynu mamy $|B| \cdot |B| \cdot \ldots |B| = |B|^{|A|}$ funkcji z A do B - wzór ten nazywa się *prawem potęgi*.

Prawo iloczynu - ważny przykład

Zadanie

Niech A i B będą zbiorami skończonymi. Ile można zdefiniować funkcji $f : A \to B$?

Z definicji funkcji dla każdego argumentu $a \in A$ musimy wybrać $b \in B$. Czyli dokonujemy $|A|$ wyborów, a w każdym kroku wybieramy spośród $|B|$ możliwości. Zatem, zgodnie z prawem iloczynu mamy $|B| \cdot |B| \cdot \ldots |B| = |B|^{|A|}$ funkcji z A do B - wzór ten nazywa się *prawem potęgi*. Ze względu na to, często zbiór wszystkich funkcji z A do B jest oznaczany jako B^A.

Prawo potęgi - szczególny przypadek

Zadanie

Niech A będzie zbiorem skończonym. Z ilu zbiorów składa się $\mathfrak{P}(A)$, czyli zbiór wszystkich podzbiorów A?

Prawo potęgi - szczególny przypadek

Zadanie

Niech A będzie zbiorem skończonym. Z ilu zbiorów składa się $\mathfrak{P}(A)$, czyli zbiór wszystkich podzbiorów A?

Zauważmy wpierw, że każdemu podzbiorowi $B \subset A$ można przyporządkować jednoznacznie funkcję $f : A \to \{0, 1\}$ taką, że $f(a) = 0$, gdy $a \notin B$ i $f(a) = 1$ gdy $a \in B$.

Prawo potęgi - szczególny przypadek

Zadanie

Niech A będzie zbiorem skończonym. Z ilu zbiorów składa się $\mathfrak{P}(A)$, czyli zbiór wszystkich podzbiorów A?

Zauważmy wpierw, że każdemu podzbiorowi $B \subset A$ można przyporządkować jednoznacznie funkcję $f : A \to \{0, 1\}$ taką, że $f(a) = 0$, gdy $a \notin B$ i $f(a) = 1$ gdy $a \in B$. Również każdej funkcji $f : A \to \{0, 1\}$ analogicznie można jednoznacznie przypisać podzbiór $B \subset A$.

Prawo potęgi - szczególny przypadek

Zadanie

Niech A będzie zbiorem skończonym. Z ilu zbiorów składa się $\mathfrak{P}(A)$, czyli zbiór wszystkich podzbiorów A?

Zauważmy wpierw, że każdemu podzbiorowi $B \subset A$ można przyporządkować jednoznacznie funkcję $f : A \to \{0, 1\}$ taką, że $f(a) = 0$, gdy $a \notin B$ i $f(a) = 1$ gdy $a \in B$. Również każdej funkcji $f : A \to \{0, 1\}$ analogicznie można jednoznacznie przypisać podzbiór $B \subset A$. Zatem podzbiorów A jest tyle samo, co funkcji z A w zbiór dwuelementowy.

Prawo potęgi - szczególny przypadek

Zadanie

Niech A będzie zbiorem skończonym. Z ilu zbiorów składa się $\mathfrak{P}(A)$, czyli zbiór wszystkich podzbiorów A?

Zauważmy wpierw, że każdemu podzbiorowi $B \subset A$ można przyporządkować jednoznacznie funkcję $f : A \to \{0, 1\}$ taką, że $f(a) = 0$, gdy $a \notin B$ i $f(a) = 1$ gdy $a \in B$. Również każdej funkcji $f : A \to \{0, 1\}$ analogicznie można jednoznacznie przypisać podzbiór $B \subset A$. Zatem podzbiorów A jest tyle samo, co funkcji z A w zbiór dwuelementowy. Na podstawie prawa potęgi: $|\mathfrak{P}(A)| = 2^{|A|}$.

Prawo iloczynu - przykład

Zadanie

Na ile sposobów można wylosować ciąg pięciu kart (kolejność ma znaczenie!) z talii 52-kartowej ze zwracaniem i bez zwracania?

Prawo iloczynu - przykład

Zadanie

Na ile sposobów można wylosować ciąg pięciu kart (kolejność ma znaczenie!) z talii 52-kartowej ze zwracaniem i bez zwracania?

Najpierw zakładamy, że losujemy ze zwracaniem.

Prawo iloczynu - przykład

Zadanie

Na ile sposobów można wylosować ciąg pięciu kart (kolejność ma znaczenie!) z talii 52-kartowej ze zwracaniem i bez zwracania?

Najpierw zakładamy, że losujemy ze zwracaniem. Żeby zastosować prawo iloczynu popatrzmy na zadanie tak: mamy wylosować ciąg 5 - elementowy.

Prawo iloczynu - przykład

Zadanie

Na ile sposobów można wylosować ciąg pięciu kart (kolejność ma znaczenie!) z talii 52-kartowej ze zwracaniem i bez zwracania?

Najpierw zakładamy, że losujemy ze zwracaniem. Żeby zastosować prawo iloczynu popatrzmy na zadanie tak: mamy wylosować ciąg 5 - elementowy. Każde losowanie wykonuję ze zbioru 52-elementowego.

Prawo iloczynu - przykład

Zadanie

Na ile sposobów można wylosować ciąg pięciu kart (kolejność ma znaczenie!) z talii 52-kartowej ze zwracaniem i bez zwracania?

Najpierw zakładamy, że losujemy ze zwracaniem. Żeby zastosować prawo iloczynu popatrzmy na zadanie tak: mamy wylosować ciąg 5 - elementowy. Każde losowanie wykonuję ze zbioru 52-elementowego. Zatem na podstawie prawa iloczynu, można wylosować taki ciąg na $|X| = 52 \cdot 52 \cdot 52 \cdot 52 \cdot 52 = 52^5$ sposobów.

Prawo iloczynu - przykład

Zadanie

Na ile sposobów można wylosować ciąg pięciu kart (kolejność ma znaczenie!) z talii 52-kartowej ze zwracaniem i bez zwracania?

Najpierw zakładamy, że losujemy ze zwracaniem. Żeby zastosować prawo iloczynu popatrzmy na zadanie tak: mamy wylosować ciąg 5 - elementowy. Każde losowanie wykonuję ze zbioru 52-elementowego. Zatem na podstawie prawa iloczynu, można wylosować taki ciąg na $|X| = 52 \cdot 52 \cdot 52 \cdot 52 \cdot 52 = 52^5$ sposobów.
Trochę bardziej skomplikowana jest sytuacja losowania bez zwracania.

Prawo iloczynu - przykład

Zadanie

Na ile sposobów można wylosować ciąg pięciu kart (kolejność ma znaczenie!) z talii 52-kartowej ze zwracaniem i bez zwracania?

Najpierw zakładamy, że losujemy ze zwracaniem. Żeby zastosować prawo iloczynu popatrzmy na zadanie tak: mamy wylosować ciąg 5 - elementowy. Każde losowanie wykonuję ze zbioru 52-elementowego. Zatem na podstawie prawa iloczynu, można wylosować taki ciąg na $|X| = 52 \cdot 52 \cdot 52 \cdot 52 \cdot 52 = 52^5$ sposobów.
Trochę bardziej skomplikowana jest sytuacja losowania bez zwracania.Znów losujemy ciąg 5-elementowy, ale z 52 kart losujemy tylko w pierwszym kroku.

Prawo iloczynu - przykład

Zadanie

Na ile sposobów można wylosować ciąg pięciu kart (kolejność ma znaczenie!) z talii 52-kartowej ze zwracaniem i bez zwracania?

Najpierw zakładamy, że losujemy ze zwracaniem. Żeby zastosować prawo iloczynu popatrzmy na zadanie tak: mamy wylosować ciąg 5 - elementowy. Każde losowanie wykonuję ze zbioru 52-elementowego. Zatem na podstawie prawa iloczynu, można wylosować taki ciąg na $|X| = 52 \cdot 52 \cdot 52 \cdot 52 \cdot 52 = 52^5$ sposobów.
Trochę bardziej skomplikowana jest sytuacja losowania bez zwracania.Znów losujemy ciąg 5-elementowy, ale z 52 kart losujemy tylko w pierwszym kroku. W drugim losowaniu mam 51 możliwości (bo jedna karta) wypadła z puli, w trzecim 50 itd.

Prawo iloczynu - przykład

Zadanie

Na ile sposobów można wylosować ciąg pięciu kart (kolejność ma znaczenie!) z talii 52-kartowej ze zwracaniem i bez zwracania?

Najpierw zakładamy, że losujemy ze zwracaniem. Żeby zastosować prawo iloczynu popatrzmy na zadanie tak: mamy wylosować ciąg 5 - elementowy. Każde losowanie wykonuję ze zbioru 52-elementowego. Zatem na podstawie prawa iloczynu, można wylosować taki ciąg na $|X| = 52 \cdot 52 \cdot 52 \cdot 52 \cdot 52 = 52^5$ sposobów.
Trochę bardziej skomplikowana jest sytuacja losowania bez zwracania.Znów losujemy ciąg 5-elementowy, ale z 52 kart losujemy tylko w pierwszym kroku. W drugim losowaniu mam 51 możliwości (bo jedna karta) wypadła z puli, w trzecim 50 itd. Zatem na podstawie prawa iloczynu, można wylosować taki ciąg na $|X| = 52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 = \frac{52!}{47!}$ sposobów.

Wariacje

Poprzednie zadanie jest szczególnym przypadkiem ogólnego wzoru.

Wariacje

Poprzednie zadanie jest szczególnym przypadkiem ogólnego wzoru.
Niech $|S| = n > 0$ i $0 \leqslant r \leqslant n$.

Wariacje

Poprzednie zadanie jest szczególnym przypadkiem ogólnego wzoru.
Niech $|S| = n > 0$ i $0 \leqslant r \leqslant n$.

Wariacje z powtórzeniami

Ciąg r elementów ze zbioru S (niekoniecznie różnych) nazywamy *wariacją* (domyślnie z powtórzeniami) ze zbioru S. Moc zbioru takich wariacji oznaczamy $W(n, r)$.

Wariacje

Poprzednie zadanie jest szczególnym przypadkiem ogólnego wzoru.
Niech $|S| = n > 0$ i $0 \leqslant r \leqslant n$.

Wariacje z powtórzeniami

Ciąg r elementów ze zbioru S (niekoniecznie różnych) nazywamy *wariacją* (domyślnie z powtórzeniami) ze zbioru S. Moc zbioru takich wariacji oznaczamy $W(n, r)$.

Wariacje bez powtórzeń

Ciąg r **różnych** elementów ze zbioru S nazywamy *r-elementową wariacją* ze zbioru S *bez powtórzeń*. Moc zbioru takich wariacji oznaczamy przez $P(n, r)$.

Wariacje

Wariacje z powtórzeniami

$$W(n, r) = n^r$$

Wariacje

Wariacje z powtórzeniami

$W(n, r) = n^r$

Wariacje bez powtórzeń

$$P(n, r) = \prod_{j=0}^{r-1}(n - j) = \frac{n!}{(n - r)!}.$$

W szczególności, istnieje $P(n, n) = n!$ n-wyrazowych wariacji bez powtórzeń ze zbioru S, które nazywamy *permutacjami* zbioru S.

Permutacje i funkcje kodujące

Przypominam, że funkcja kodująca to była permutacja zbioru jednostek tekstu jawnego i szyfrogramu.

Permutacje i funkcje kodujące

Przypominam, że funkcja kodująca to była permutacja zbioru jednostek tekstu jawnego i szyfrogramu. Zatem, jeśli ten zbiór jednostek oznaczymy jako J, to istnieje $|J|!$ funkcji kodujących.

Różnica między stosowaniem prawa sumy i prawa iloczynu

Wiele problemów sprawia pytanie, kiedy w praktycznych zadaniach zastosować prawo sumy, a kiedy prawo iloczynu.

Różnica między stosowaniem prawa sumy i prawa iloczynu

Wiele problemów sprawia pytanie, kiedy w praktycznych zadaniach zastosować prawo sumy, a kiedy prawo iloczynu. Najlepiej wyrobić sobie intuicję, robiąc dużo zadań z kombinatoryki, ale ogólna wskazówka jest następująca:

Różnica między stosowaniem prawa sumy i prawa iloczynu

Wiele problemów sprawia pytanie, kiedy w praktycznych zadaniach zastosować prawo sumy, a kiedy prawo iloczynu. Najlepiej wyrobić sobie intuicję, robiąc dużo zadań z kombinatoryki, ale ogólna wskazówka jest następująca: Jeśli mamy obliczyć liczbę elementów zbioru, posiadających jedną z kilku cech (spójnik **lub**), to zapewne powinniśmy użyć prawa sumy (lub w bardziej skomplikowanych okolicznościach - prawa włączeń i wyłączeń, które wkrótce napotkamy).

Różnica między stosowaniem prawa sumy i prawa iloczynu

Wiele problemów sprawia pytanie, kiedy w praktycznych zadaniach zastosować prawo sumy, a kiedy prawo iloczynu. Najlepiej wyrobić sobie intuicję, robiąc dużo zadań z kombinatoryki, ale ogólna wskazówka jest następująca: Jeśli mamy obliczyć liczbę elementów zbioru, posiadających jedną z kilku cech (spójnik **lub**), to zapewne powinniśmy użyć prawa sumy (lub w bardziej skomplikowanych okolicznościach - prawa włączeń i wyłączeń, które wkrótce napotkamy). Jeśli mamy obliczyć na ile sposobów możemy wybrać element z jedną cechą, a następnie element z drugą cechą itp., to zapewne powinniśmy użyć prawa iloczynu (wskazówką jest, że tych wyborów można dokonywać sekwencyjnie tj. jeden po drugim, albo też użycie spójnika **i**).

Prawo sumy, a prawo iloczynu - przykład

Załóżmy, że mamy dany zbiór osób dzielący się na podzbiory na dwa sposoby:
a) K - zbiór kobiet, M - zbiór mężczyzn.

Prawo sumy, a prawo iloczynu - przykład

Załóżmy, że mamy dany zbiór osób dzielący się na podzbiory na dwa sposoby:
a) K - zbiór kobiet, M - zbiór mężczyzn.
b) C - zbiór ciemnowłosych, J - zbiór jasnowłosych.

Prawo sumy, a prawo iloczynu - przykład

Załóżmy, że mamy dany zbiór osób dzielący się na podzbiory na dwa sposoby:
a) K - zbiór kobiet, M - zbiór mężczyzn.
b) C - zbiór ciemnowłosych, J - zbiór jasnowłosych.
Jeśli mamy znaleźć osobę, która jest kobietą **lub** jest ciemnowłosa, użyjemy prawa sumy (jedna z kilku cech) i otrzymamy, że jest $|X| = |K| + |C| - |K \cap C|$ takich osób.

Prawo sumy, a prawo iloczynu - przykład

Załóżmy, że mamy dany zbiór osób dzielący się na podzbiory na dwa sposoby:
a) K - zbiór kobiet, M - zbiór mężczyzn.
b) C - zbiór ciemnowłosych, J - zbiór jasnowłosych.
Jeśli mamy znaleźć osobę, która jest kobietą **lub** jest ciemnowłosa, użyjemy prawa sumy (jedna z kilku cech) i otrzymamy, że jest $|X| = |K| + |C| - |K \cap C|$ takich osób.
Jeśli mamy znaleźć liczbę dwuosobowych delegacji złożonych z kobiety i mężczyzny, obliczamy na podstawie prawa iloczynu $|X| = |K| \cdot |M|$ (bo jest tu sekwencyjny wybór: możemy wybrać najpierw kobietę, potem mężczyznę).

Ciągi i zbiory, wariacje i kombinacje

Wariacje istotne są przy zliczaniu ciągów, czyli zestawień elementów w których porządek ustawienia elementów jest istotny.

Ciągi i zbiory, wariacje i kombinacje

Wariacje istotne są przy zliczaniu ciągów, czyli zestawień elementów w których porządek ustawienia elementów jest istotny.
Jeśli porządek ustawienia elementów (kolejność) nie jest istotny, zliczamy raczej liczbę pewnych podzbiorów, czyli kombinacje.

Ciągi i zbiory, wariacje i kombinacje

Wariacje istotne są przy zliczaniu ciągów, czyli zestawień elementów w których porządek ustawienia elementów jest istotny.
Jeśli porządek ustawienia elementów (kolejność) nie jest istotny, zliczamy raczej liczbę pewnych podzbiorów, czyli kombinacje. W podzbiorach zazwyczaj elementy nie powinny się powtarzać.

Ciągi i zbiory, wariacje i kombinacje

Wariacje istotne są przy zliczaniu ciągów, czyli zestawień elementów w których porządek ustawienia elementów jest istotny.
Jeśli porządek ustawienia elementów (kolejność) nie jest istotny, zliczamy raczej liczbę pewnych podzbiorów, czyli kombinacje. W podzbiorach zazwyczaj elementy nie powinny się powtarzać.

Kombinacje

r-elementową kombinacją elementów zbioru S nazywamy jego r-elementowy podzbiór. Liczbę takich podzbiorów oznaczamy $\binom{n}{r}$ (czytamy „n po r" lub „n nad r") i nazywamy *współczynnikiem dwumianowym Newtona*.

Kombinacje

Kombinacje

r-elementową kombinacją elementów zbioru S nazywamy jego r-elementowy podzbiór. Liczbę takich podzbiorów oznaczamy $\binom{n}{r}$ (czytamy „n po r" lub „n nad r") i nazywamy *współczynnikiem dwumianowym Newtona*.

Kombinacje

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}.$$

Kombinacje - przykład

Zadanie

Ile istnieje ciągów długości n, złożonych z zer i jedynek, zawierających dokładnie r jedynek?

Kombinacje - przykład

Zadanie

Ile istnieje ciągów długości n, złożonych z zer i jedynek, zawierających dokładnie r jedynek?

Ponumerujmy elementy ciągu od 1 do n.

Kombinacje - przykład

Zadanie

Ile istnieje ciągów długości n, złożonych z zer i jedynek, zawierających dokładnie r jedynek?

Ponumerujmy elementy ciągu od 1 do n. Teraz musimy wybrać r miejsc, na których w tym ciągu znajdą się jedynki. Wybór tych r miejsc będzie jednoznaczny z wyborem ciągu, bo na pozostałych miejscach muszą być 0.

Kombinacje - przykład

Zadanie

Ile istnieje ciągów długości n, złożonych z zer i jedynek, zawierających dokładnie r jedynek?

Ponumerujmy elementy ciągu od 1 do n. Teraz musimy wybrać r miejsc, na których w tym ciągu znajdą się jedynki. Wybór tych r miejsc będzie jednoznaczny z wyborem ciągu, bo na pozostałych miejscach muszą być 0. Innymi słowy - spośród n numerów mamy wybrać r, przy czym kolejność wyboru nie jest istotna (jeśli wybierzemy najpierw numer 2, a potem 5, to będziemy w takiej samej sytuacji jak gdy wybierzemy najpierw 5, a potem 2).

Kombinacje - przykład

Zadanie

Ile istnieje ciągów długości n, złożonych z zer i jedynek, zawierających dokładnie r jedynek?

Ponumerujmy elementy ciągu od 1 do n. Teraz musimy wybrać r miejsc, na których w tym ciągu znajdą się jedynki. Wybór tych r miejsc będzie jednoznaczny z wyborem ciągu, bo na pozostałych miejscach muszą być 0. Innymi słowy - spośród n numerów mamy wybrać r, przy czym kolejność wyboru nie jest istotna (jeśli wybierzemy najpierw numer 2, a potem 5, to będziemy w takiej samej sytuacji jak gdy wybierzemy najpierw 5, a potem 2). Zatem wynikiem będzie $\binom{n}{r}$.

Kombinacje - przykład

Zadanie

Na ile sposobów z talii 52 kart można ułożyć pokerowy układ zwany *fullem* (czyli trójka + para)?

Kombinacje - przykład

Zadanie

Na ile sposobów z talii 52 kart można ułożyć pokerowy układ zwany *fullem* (czyli trójka + para)?

Najpierw wybierzmy „wysokość” trójki (w sensie, czy to będą 3 piątki, czy 3 walety): możemy to zrobić na 13 sposobów.

Kombinacje - przykład

Zadanie

Na ile sposobów z talii 52 kart można ułożyć pokerowy układ zwany *fullem* (czyli trójka + para)?

Najpierw wybierzmy „wysokość” trójki (w sensie, czy to będą 3 piątki, czy 3 walety): możemy to zrobić na 13 sposobów. Następnie, wybierzmy z jakich kolorów będą pochodzić karty w trójce.

Kombinacje - przykład

Zadanie

Na ile sposobów z talii 52 kart można ułożyć pokerowy układ zwany *fullem* (czyli trójka + para)?

Najpierw wybierzmy „wysokość" trójki (w sensie, czy to będą 3 piątki, czy 3 walety): możemy to zrobić na 13 sposobów. Następnie, wybierzmy z jakich kolorów będą pochodzić karty w trójce. Musimy wybrać 3 z 4 kolorów i kolejność wyboru nie ma znaczenia (bo wszystko jedno, czy najpierw wybierzemy trefle, czy kiery).

Kombinacje - przykład

Zadanie

Na ile sposobów z talii 52 kart można ułożyć pokerowy układ zwany *fullem* (czyli trójka + para)?

Najpierw wybierzmy „wysokość” trójki (w sensie, czy to będą 3 piątki, czy 3 walety): możemy to zrobić na 13 sposobów. Następnie, wybierzmy z jakich kolorów będą pochodzić karty w trójce. Musimy wybrać 3 z 4 kolorów i kolejność wyboru nie ma znaczenia (bo wszystko jedno, czy najpierw wybierzemy trefle, czy kiery). Zatem stosujemy kombinacje: $\binom{4}{3}$.

Kombinacje - przykład

Zadanie

Na ile sposobów z talii 52 kart można ułożyć pokerowy układ zwany *fullem* (czyli trójka + para)?

Kombinacje - przykład

Zadanie

Na ile sposobów z talii 52 kart można ułożyć pokerowy układ zwany *fullem* (czyli trójka + para)?

Teraz wybieramy „wysokość” pary.

Kombinacje - przykład

Zadanie

Na ile sposobów z talii 52 kart można ułożyć pokerowy układ zwany *fullem* (czyli trójka + para)?

Teraz wybieramy „wysokość” pary. Nie może być taka sama jak wysokość trójki, więc zostało 12 możliwości.

Kombinacje - przykład

Zadanie

Na ile sposobów z talii 52 kart można ułożyć pokerowy układ zwany *fullem* (czyli trójka + para)?

Teraz wybieramy „wysokość" pary. Nie może być taka sama jak wysokość trójki, więc zostało 12 możliwości.Wybieranie kolorów w parze przeprowadzamy tak jak w trójce i otrzymujemy $\binom{4}{2}$ możliwości wyboru kolorów.

Kombinacje - przykład

Zadanie

Na ile sposobów z talii 52 kart można ułożyć pokerowy układ zwany *fullem* (czyli trójka + para)?

Teraz wybieramy „wysokość” pary. Nie może być taka sama jak wysokość trójki, więc zostało 12 możliwości.Wybieranie kolorów w parze przeprowadzamy tak jak w trójce i otrzymujemy $\binom{4}{2}$ możliwości wyboru kolorów. Zatem, zgodnie z prawem iloczynu ostateczny wynik to:

$$13 \cdot 12 \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2} = 3744.$$

Uwaga dotycząca wyników zadań

Jak widać, w wynikach zadań często pojawiają się rezultaty typu $\binom{11}{7}$, 50^8, $18!$ itp. Nie ma potrzeby obliczać ich dokładnej wartości - w szczególności dlatego, że jest na tyle duża, że kalkulator może nie dać sobie z tym rady. W praktycznych zastosowaniach zwykle służy nam taka wartość albo do porównania z inną, albo do obliczenia prawdopodobieństwa - i jest szansa, że te duże liczby się poskracają. Podsumowując, wynik w stylu $\binom{11}{7} \cdot 50^8 + \frac{18!}{13!}$ jest absolutnie dobrym wynikiem zadania i nie trzeba już nic dalej wyliczać. Oczywiście, czasami jeśli te liczby są małe (typu $\binom{5}{3}, 2^3, 4!$) - raczej powinno się to przeliczyć, acz pozostawienie wyniku w tej postaci nie jest dużym błędem.

Zasada włączeń i wyłączeń

Uogólnimy teraz prawo sumy na sytuację z większą liczbą zbiorów.

Uogólnimy teraz prawo sumy na sytuację z większą liczbą zbiorów.

Zasada włączeń i wyłączeń

Niech $A_1, A_2, \ldots, A_n$ będą zbiorami skończonymi. Aby znaleźć liczbę elementów zbioru $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, należy znaleźć liczby wszystkich możliwych przecięć tych zbiorów, dodać do siebie wyniki uzyskane dla przecięć nieparzystej liczby zbiorów, a następnie odjąć wyniki uzyskane dla przecięć parzystej liczby zbiorów. Ściślej:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| + \sum_{k \neq i \neq j \neq k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots$$

Zasada włączeń i wyłączeń

Uogólnimy teraz prawo sumy na sytuację z większą liczbą zbiorów.

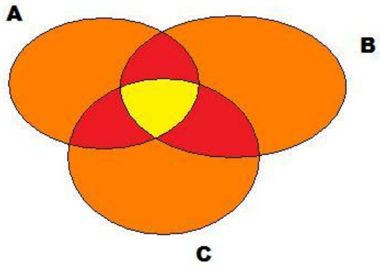
Zasada włączeń i wyłączeń

Niech $A_1, A_2, \ldots, A_n$ będą zbiorami skończonymi. Aby znaleźć liczbę elementów zbioru $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, należy znaleźć liczby wszystkich możliwych przecięć tych zbiorów, dodać do siebie wyniki uzyskane dla przecięć nieparzystej liczby zbiorów, a następnie odjąć wyniki uzyskane dla przecięć parzystej liczby zbiorów. Ściślej:

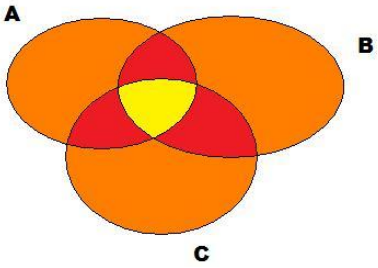
$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| + \sum_{k \neq i \neq j \neq k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots$$

Zauważmy, że dla zbiorów otrzymujemy po prostu prawo sumy.

Zasada włączeń i wyłączeń - objaśnienie dla 3 zbiorów

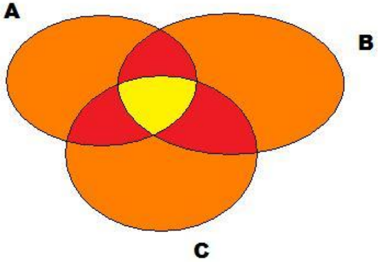


Zasada włączeń i wyłączeń - objaśnienie dla 3 zbiorów



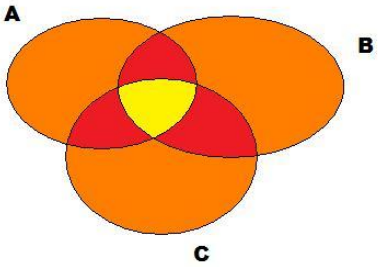
Aby obliczyć liczbę elementów na zakolorowanym obszarze, trzeba policzyć każdy element $A \cup B \cup C$ dokładnie raz.

Zasada włączeń i wyłączeń - objaśnienie dla 3 zbiorów



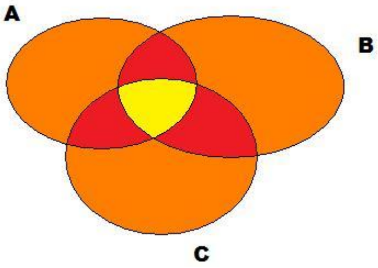
Aby obliczyć liczbę elementów na zakolorowanym obszarze, trzeba policzyć każdy element $A \cup B \cup C$ dokładnie raz. Gdybyśmy liczyli $|A| + |B| + |C|$, to faktycznie policzylibyśmy po raz elementy z pomarańczowego obszaru, ale elementy z czerwonego obszaru (czyli przecięcia parzystej liczby zbiorów) policzylibyśmy dwa razy, a elementy przecięcia $A \cup B \cup C$ (żółty obszar) nawet 3 razy!

Zasada włączeń i wyłączeń - objaśnienie dla 3 zbiorów



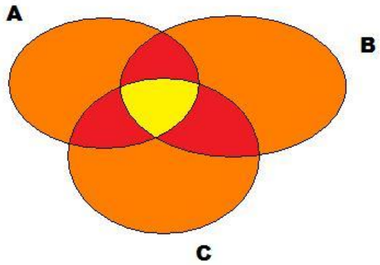
Jeśli odejmiemy od $|A| + |B| + |C|$ sumę $|A \cap B| + |B \cap C| + |C \cap A|$ to co prawda elementy z pomarańczowych i czerwonych obszarów policzyliśmy efektywnie po raz, ale elementy z żółtego obszaru najpierw policzyliśmy 3 razy, a potem odjęliśmy 3 razy - czyli efektywnie ich nie policzyliśmy.

Zasada włączeń i wyłączeń - objaśnienie dla 3 zbiorów



Jeśli odejmiemy od $|A| + |B| + |C|$ sumę $|A \cap B| + |B \cap C| + |C \cap A|$ to co prawda elementy z pomarańczowych i czerwonych obszarów policzyliśmy efektywnie po raz, ale elementy z żółtego obszaru najpierw policzyliśmy 3 razy, a potem odjęliśmy 3 razy - czyli efektywnie ich nie policzyliśmy. Dlatego trzeba dodać $|A \cap B \cap C|$ jeszcze raz.

Zasada włączeń i wyłączeń - objaśnienie dla 3 zbiorów



Ostatecznie:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |B \cap C| + |C \cap A|) + |A \cap B \cap C|.$$

Zasada włączeń i wyłączeń - przykład

Zadanie

Ile jest liczb całkowitych 4-cyfrowych, takich, w których co najmniej raz występuje cyfra 0, co najmniej raz cyfra 1 i co najmniej raz cyfra 2?

Zasada włączeń i wyłączeń - przykład

Zadanie

Ile jest liczb całkowitych 4-cyfrowych, takich, w których co najmniej raz występuje cyfra 0, co najmniej raz cyfra 1 i co najmniej raz cyfra 2?

Do tego zadania nie jest łatwo podejść (w definicji zbioru nie ma słowa **lub**, które sugerowałoby zasadę włączeń i wyłączeń), ale zastosujemy tutaj pewien użyteczny trik. Zamiast obliczać zbiór X zadany warunkami zadania, obliczymy jego dopełnienie - zbiór A takich liczb 4-cyfrowych, w których nie występuje cyfra 0 lub nie występuje cyfra 1 lub nie występuje cyfra 2.

Zasada włączeń i wyłączeń - przykład

Zadanie

Ile jest liczb całkowitych 4-cyfrowych, takich, w których co najmniej raz występuje cyfra 0, co najmniej raz cyfra 1 i co najmniej raz cyfra 2?

Do tego zadania nie jest łatwo podejść (w definicji zbioru nie ma słowa **lub**, które sugerowałoby zasadę włączeń i wyłączeń), ale zastosujemy tutaj pewien użyteczny trik. Zamiast obliczać zbiór X zadany warunkami zadania, obliczymy jego dopełnienie - zbiór A takich liczb 4-cyfrowych, w których nie występuje cyfra 0 lub nie występuje cyfra 1 lub nie występuje cyfra 2. Liczb 4-cyfrowych jest 9000, więc gdy obliczymy moc A, moc X uzyskamy ze wzoru: $|X| = 9000 - |A|$.

Zasada włączeń i wyłączeń - przykład

Zadanie

Ile liczb jest liczb całkowitych 4-cyfrowych, takich, w których co najmniej raz występuje cyfra 0, co najmniej raz cyfra 1 i co najmniej raz cyfra 2?

Zasada włączeń i wyłączeń - przykład

Zadanie

Ile liczb jest liczb całkowitych 4-cyfrowych, takich, w których co najmniej raz występuje cyfra 0, co najmniej raz cyfra 1 i co najmniej raz cyfra 2?

By zastosować zasadę włączeń i wyłączeń, zbiór A podzielimy na 3 części: A_0 - zbiór liczb 4-cyfrowych, w których nie występuje cyfra 0, A_1 - zbiór liczb 4-cyfrowych, w których nie występuje cyfra 1 i A_2 - zbiór liczb 4-cyfrowych, w których nie występuje cyfra 2.

Zasada włączeń i wyłączeń - przykład

Zadanie

Ile liczb jest liczb całkowitych 4-cyfrowych, takich, w których co najmniej raz występuje cyfra 0, co najmniej raz cyfra 1 i co najmniej raz cyfra 2?

By zastosować zasadę włączeń i wyłączeń, zbiór A podzielimy na 3 części: A_0 - zbiór liczb 4-cyfrowych, w których nie występuje cyfra 0, A_1 - zbiór liczb 4-cyfrowych, w których nie występuje cyfra 1 i A_2 - zbiór liczb 4-cyfrowych, w których nie występuje cyfra 2.
Łatwo obliczyć moc zbioru A_0.

Zasada włączeń i wyłączeń - przykład

Zadanie

Ile liczb jest liczb całkowitych 4-cyfrowych, takich, w których co najmniej raz występuje cyfra 0, co najmniej raz cyfra 1 i co najmniej raz cyfra 2?

By zastosować zasadę włączeń i wyłączeń, zbiór A podzielimy na 3 części: A_0 - zbiór liczb 4-cyfrowych, w których nie występuje cyfra 0, A_1 - zbiór liczb 4-cyfrowych, w których nie występuje cyfra 1 i A_2 - zbiór liczb 4-cyfrowych, w których nie występuje cyfra 2.
Łatwo obliczyć moc zbioru A_0. Po prostu wybieramy po kolei każdą z cyfr liczby z A_0, czyli 4 razy, ze zwracaniem, wybieramy jedną z 9 możliwości (0 jest zabronione).

Zasada włączeń i wyłączeń - przykład

Zadanie

Ile liczb jest liczb całkowitych 4-cyfrowych, takich, w których co najmniej raz występuje cyfra 0, co najmniej raz cyfra 1 i co najmniej raz cyfra 2?

By zastosować zasadę włączeń i wyłączeń, zbiór A podzielimy na 3 części: A_0 - zbiór liczb 4-cyfrowych, w których nie występuje cyfra 0, A_1 - zbiór liczb 4-cyfrowych, w których nie występuje cyfra 1 i A_2 - zbiór liczb 4-cyfrowych, w których nie występuje cyfra 2.
Łatwo obliczyć moc zbioru A_0. Po prostu wybieramy po kolei każdą z cyfr liczby z A_0, czyli 4 razy, ze zwracaniem, wybieramy jedną z 9 możliwości (0 jest zabronione). W konsekwencji $|A_0| = 9^4 = 6561$.

Zasada włączeń i wyłączeń - przykład

Moc zbiorów A_1 i A_2 obliczamy analogicznie.

Zasada włączeń i wyłączeń - przykład

Moc zbiorów A_1 i A_2 obliczamy analogicznie. Jest tylko jedna różnica w porównaniu z $|A_0|$ - przy wyborze pierwszej cyfry wybieramy tylko z 8 możliwości (bo i tak jako pierwszej cyfry nie możemy wybrać 0).

Zasada włączeń i wyłączeń - przykład

Moc zbiorów A_1 i A_2 obliczamy analogicznie. Jest tylko jedna różnica w porównaniu z $|A_0|$ - przy wyborze pierwszej cyfry wybieramy tylko z 8 możliwości (bo i tak jako pierwszej cyfry nie możemy wybrać 0). W konsekwencji $|A_1| = |A_2| = 8 \cdot 9^3 = 5832$.

Zasada włączeń i wyłączeń - przykład

Moc zbiorów A_1 i A_2 obliczamy analogicznie. Jest tylko jedna różnica w porównaniu z $|A_0|$ - przy wyborze pierwszej cyfry wybieramy tylko z 8 możliwości (bo i tak jako pierwszej cyfry nie możemy wybrać 0). W konsekwencji $|A_1| = |A_2| = 8 \cdot 9^3 = 5832$.
Teraz obliczamy moce przecięć poszczególnych par. Na przykład przecięcie zbiorów A_1 i A_2 składa się z liczb 4-cyfrowych, które nie zawierają ani 1, ani 2.

Zasada włączeń i wyłączeń - przykład

Moc zbiorów A_1 i A_2 obliczamy analogicznie. Jest tylko jedna różnica w porównaniu z $|A_0|$ - przy wyborze pierwszej cyfry wybieramy tylko z 8 możliwości (bo i tak jako pierwszej cyfry nie możemy wybrać 0). W konsekwencji $|A_1| = |A_2| = 8 \cdot 9^3 = 5832$.
Teraz obliczamy moce przecięć poszczególnych par. Na przykład przecięcie zbiorów A_1 i A_2 składa się z liczb 4-cyfrowych, które nie zawierają ani 1, ani 2. Pierwszą cyfrę takiej liczby można wybrać na 7 sposobów (bo i tak jako pierwszej cyfry nie możemy wybrać 0), a pozostałe cyfry na 8 sposobów, więc $|A_1 \cap A_2| = 7 \cdot 8^3 = 3584$.

Zasada włączeń i wyłączeń - przykład

Moc zbiorów A_1 i A_2 obliczamy analogicznie. Jest tylko jedna różnica w porównaniu z $|A_0|$ - przy wyborze pierwszej cyfry wybieramy tylko z 8 możliwości (bo i tak jako pierwszej cyfry nie możemy wybrać 0). W konsekwencji $|A_1| = |A_2| = 8 \cdot 9^3 = 5832$.
Teraz obliczamy moce przecięć poszczególnych par. Na przykład przecięcie zbiorów A_1 i A_2 składa się z liczb 4-cyfrowych, które nie zawierają ani 1, ani 2. Pierwszą cyfrę takiej liczby można wybrać na 7 sposobów (bo i tak jako pierwszej cyfry nie możemy wybrać 0), a pozostałe cyfry na 8 sposobów, więc $|A_1 \cap A_2| = 7 \cdot 8^3 = 3584$.
Analogicznie obliczamy moce przecięć A_0 z każdym z pozostałych zbiorów.

Zasada włączeń i wyłączeń - przykład

Moc zbiorów A_1 i A_2 obliczamy analogicznie. Jest tylko jedna różnica w porównaniu z $|A_0|$ - przy wyborze pierwszej cyfry wybieramy tylko z 8 możliwości (bo i tak jako pierwszej cyfry nie możemy wybrać 0). W konsekwencji $|A_1| = |A_2| = 8 \cdot 9^3 = 5832$.
Teraz obliczamy moce przecięć poszczególnych par. Na przykład przecięcie zbiorów A_1 i A_2 składa się z liczb 4-cyfrowych, które nie zawierają ani 1, ani 2. Pierwszą cyfrę takiej liczby można wybrać na 7 sposobów (bo i tak jako pierwszej cyfry nie możemy wybrać 0), a pozostałe cyfry na 8 sposobów, więc $|A_1 \cap A_2| = 7 \cdot 8^3 = 3584$.
Analogicznie obliczamy moce przecięć A_0 z każdym z pozostałych zbiorów. Jedyna różnica jest taka, że w wypadku tych przecięć każdą cyfrę można wybrać na 8 sposobów, więc
$|A_0 \cap A_1| = |A_0 \cap A_2| = 8^4 = 4096$.

Zasada włączeń i wyłączeń - przykład

Wreszcie liczby z przecięcia $A_0 \cap A_1 \cap A_2$ nie mogą zawierać 0, 1 i 2 jako swoich cyfr, więc na każdym miejscu wybieramy cyfrę tej liczby na 7 sposobów.

Zasada włączeń i wyłączeń - przykład

Wreszcie liczby z przecięcia $A_0 \cap A_1 \cap A_2$ nie mogą zawierać 0, 1 i 2 jako swoich cyfr, więc na każdym miejscu wybieramy cyfrę tej liczby na 7 sposobów. Stąd $|A_0 \cap A_1 \cap A_2| = 7^4 = 2401$.

Zasada włączeń i wyłączeń - przykład

Wreszcie liczby z przecięcia $A_0 \cap A_1 \cap A_2$ nie mogą zawierać 0, 1 i 2 jako swoich cyfr, więc na każdym miejscu wybieramy cyfrę tej liczby na 7 sposobów. Stąd $|A_0 \cap A_1 \cap A_2| = 7^4 = 2401$.
Z zasady włączeń i wyłączeń:

$$|A| = |A_0 \cup A_1 \cup A_2| = |A_0| + |A_1| + |A_2| - (|A_0 \cap A_1| + |A_0 \cap A_2| + |A_1 \cap A_2|) +$$

$$+ |A_0 \cap A_1 \cap A_2| = 8850.$$

Zasada włączeń i wyłączeń - przykład

Wreszcie liczby z przecięcia $A_0 \cap A_1 \cap A_2$ nie mogą zawierać 0, 1 i 2 jako swoich cyfr, więc na każdym miejscu wybieramy cyfrę tej liczby na 7 sposobów. Stąd $|A_0 \cap A_1 \cap A_2| = 7^4 = 2401$.
Z zasady włączeń i wyłączeń:

$$|A| = |A_0 \cup A_1 \cup A_2| = |A_0| + |A_1| + |A_2| - (|A_0 \cap A_1| + |A_0 \cap A_2| + |A_1 \cap A_2|) +$$

$$+ |A_0 \cap A_1 \cap A_2| = 8850.$$

I ostatecznie: $|X| = 9000 - |A| = 150$, czyli istnieje 150 liczb spełniających warunki zadania.

Wzór pudełkowy

Wzór pudełkowy

Istnieje $\binom{n+k-1}{k-1}$ sposobów rozmieszczania n identycznych przedmiotów w k rozróżnialnych pudełkach.

Wzór pudełkowy

Wzór pudełkowy

Istnieje $\binom{n+k-1}{k-1}$ sposobów rozmieszczania n identycznych przedmiotów w k rozróżnialnych pudełkach.

Wzór pudełkowy - inne sformułowanie

Liczba sposobów wyboru n przedmiotów należących do k rozróżnialnych typów przy założeniu, że powtórzenia są dopuszczalne, wynosi $\binom{n+k-1}{k-1}$.

Te dwie interpretacje wzoru są równoważne.

Wzór pudełkowy - interpretacja

Przedmioty nierozróżnialne można po prostu ustawić w rzędzie i podzielić $k - 1$ „separatorami" tak, by pomiędzy „separatorami" były przedmioty, które trafiają do tego samego pudełka.

Wzór pudełkowy - interpretacja

Przedmioty nierozróżnialne można po prostu ustawić w rzędzie i podzielić $k-1$ „separatorami" tak, by pomiędzy „separatorami" były przedmioty, które trafiają do tego samego pudełka.

Wzór pudełkowy - interpretacja

Przedmioty nierozróżnialne można po prostu ustawić w rzędzie i podzielić $k-1$ „separatorami" tak, by pomiędzy „separatorami" były przedmioty, które trafiają do tego samego pudełka.

Przykładowo powyżej mamy podział 17 przedmiotów między 6 pudełek za pomocą 5 separatorów: do pierwszego trafią 2 przedmioty, do drugiego 3, do trzeciego 6, do czwartego 0 (bo są 2 separatory obok siebie), do piątego 4 i do szóstego 2.

Wzór pudełkowy - interpretacja

Przedmioty nierozróżnialne można po prostu ustawić w rzędzie i podzielić $k-1$ „separatorami" tak, by pomiędzy „separatorami" były przedmioty, które trafiają do tego samego pudełka.

Przykładowo powyżej mamy podział 17 przedmiotów między 6 pudełek za pomocą 5 separatorów: do pierwszego trafią 2 przedmioty, do drugiego 3, do trzeciego 6, do czwartego 0 (bo są 2 separatory obok siebie), do piątego 4 i do szóstego 2. Zauważmy, że w ten sposób sprowadzamy zagadnienie do ustawienia w ciąg $n+k-1$ obiektów (przedmiotów i separatorów).

Wzór pudełkowy - interpretacja

Przedmioty nierozróżnialne można po prostu ustawić w rzędzie i podzielić $k-1$ „separatorami" tak, by pomiędzy „separatorami" były przedmioty, które trafiają do tego samego pudełka.

Przykładowo powyżej mamy podział 17 przedmiotów między 6 pudełek za pomocą 5 separatorów: do pierwszego trafią 2 przedmioty, do drugiego 3, do trzeciego 6, do czwartego 0 (bo są 2 separatory obok siebie), do piątego 4 i do szóstego 2. Zauważmy, że w ten sposób sprowadzamy zagadnienie do ustawienia w ciąg $n+k-1$ obiektów (przedmiotów i separatorów). Jako, że zarówno przedmioty, jak i separatory są nierozróżnialne - wszystko sprowadza się do wskazania miejsc w tym ciągu, gdzie mają stać separatory - stąd $\binom{n+k-1}{k-1}$.

Wzór pudełkowy - uwagi

- Twierdzenia o wzorze pudełkowym przedstawiłem w postaci nieco nieformalnej, ale zaskakująco dużo problemów da się do tej postaci sprowadzić.

Wzór pudełkowy - uwagi

- Twierdzenia o wzorze pudełkowym przedstawiłem w postaci nieco nieformalnej, ale zaskakująco dużo problemów da się do tej postaci sprowadzić.
- Układanie nierozróżnialnych przedmiotów w nierozróżnialnych pudełkach jest znacznie trudniejsze, jeśli chodzi o obliczanie liczby możliwości. Nie ma tutaj prostego wzoru.

Wzór pudełkowy - uwagi

- Twierdzenia o wzorze pudełkowym przedstawiłem w postaci nieco nieformalnej, ale zaskakująco dużo problemów da się do tej postaci sprowadzić.
- Układanie nierozróżnialnych przedmiotów w nierozróżnialnych pudełkach jest znacznie trudniejsze, jeśli chodzi o obliczanie liczby możliwości. Nie ma tutaj prostego wzoru.
- Układanie rozróżnialnych przedmiotów w rozróżnialnych pudełkach jest łatwe: przedmioty rozróżnialne można jednoznacznie ułożyć w ciąg, więc wariacja z powtórzeniami będzie tu właściwą interpretacją zagadnienia.

Wzór pudełkowy - przykład

Zadanie

Ile liczb całkowitych dodatnich nie większych od 100000 ma tę własność, że suma ich cyfr wynosi 7?

Wzór pudełkowy - przykład

Zadanie

Ile liczb całkowitych dodatnich nie większych od 100000 ma tę własność, że suma ich cyfr wynosi 7?

Na pierwszy rzut oka nie widać, jaki jest związek tego zadania z pudełkami.

Wzór pudełkowy - przykład

Zadanie

Ile liczb całkowitych dodatnich nie większych od 100000 ma tę własność, że suma ich cyfr wynosi 7?

Na pierwszy rzut oka nie widać, jaki jest związek tego zadania z pudełkami.Najpierw zauważmy, że 100000 nie ma takiej własności, zatem wszystkie liczby, których szukamy, są co najwyżej 5-cyfrowe.

Wzór pudełkowy - przykład

Zadanie

Ile liczb całkowitych dodatnich nie większych od 100000 ma tę własność, że suma ich cyfr wynosi 7?

Na pierwszy rzut oka nie widać, jaki jest związek tego zadania z pudełkami.Najpierw zauważmy, że 100000 nie ma takiej własności, zatem wszystkie liczby, których szukamy, są co najwyżej 5-cyfrowe.Każdą taką liczbę można zinterpretować następująco: rozważamy pudełka odpowiadające jednostkom, dziesiątkom, setkom, tysiącom i dziesiątkom tysięcy w tej liczbie (jest ich 5) i do każdego pudełka wkładamy tyle kulek, ile wynosi odpowiadająca mu cyfra.

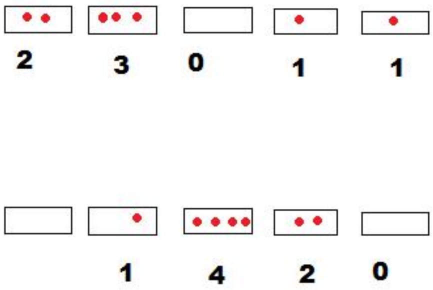
Wzór pudełkowy - przykład

Zadanie

Ile liczb całkowitych dodatnich nie większych od 100000 ma tę własność, że suma ich cyfr wynosi 7?

Na pierwszy rzut oka nie widać, jaki jest związek tego zadania z pudełkami.Najpierw zauważmy, że 100000 nie ma takiej własności, zatem wszystkie liczby, których szukamy, są co najwyżej 5-cyfrowe.Każdą taką liczbę można zinterpretować następująco: rozważamy pudełka odpowiadające jednostkom, dziesiątkom, setkom, tysiącom i dziesiątkom tysięcy w tej liczbie (jest ich 5) i do każdego pudełka wkładamy tyle kulek, ile wynosi odpowiadająca mu cyfra. Suma tych cyfr wynosi 7, więc i kulek też mamy 7 do dyspozycji.

Wzór pudełkowy - przykład



Na rysunkach powyżej rozkład kulek w pudełkach odpowiadający liczbom 23011 i 1420 - spełniającym założenia zadania. Oczywiście pudełka są rozróżnialne (bo zamiana cyfr miejscami w liczbie może zmienić tę liczbę), a kulki nie (bo zamiana miejscami dwu kulek nie zmienia liczby).

Wzór pudełkowy - przykład

Oczywiście, jeden układ 7 nierozróżnialnych kulek w 5 rozróżnialnych pudełkach odpowiada dokładnie jednej szukanej liczbie.

Wzór pudełkowy - przykład

Oczywiście, jeden układ 7 nierozróżnialnych kulek w 5 rozróżnialnych pudełkach odpowiada dokładnie jednej szukanej liczbie. Zatem zamiast pytać o ilość liczb co najwyżej pięciocyfrowych o sumie cyfr 7, możemy pytać o liczbę rozmieszczeń 7 nierozróżnialnych kulek w 5 rozróżnialnych pudełkach.

Wzór pudełkowy - przykład

Oczywiście, jeden układ 7 nierozróżnialnych kulek w 5 rozróżnialnych pudełkach odpowiada dokładnie jednej szukanej liczbie. Zatem zamiast pytać o ilość liczb co najwyżej pięciocyfrowych o sumie cyfr 7, możemy pytać o liczbę rozmieszczeń 7 nierozróżnialnych kulek w 5 rozróżnialnych pudełkach. A takich rozmieszczeń wiemy, że jest:

$$\binom{7+5-1}{5-1} = \binom{11}{4}.$$

Wzór pudełkowy - przykład 2

Zadanie

Na ile sposobów można wybrać 10 monet, mając do wyboru nieograniczony zapas groszy, pięcio-, dziesięcio- i pięćdziesięcio-groszówek?

Wzór pudełkowy - przykład 2

Zadanie

Na ile sposobów można wybrać 10 monet, mając do wyboru nieograniczony zapas groszy, pięcio-, dziesięcio- i pięćdziesięcio-groszówek?

Możemy tu bezpośrednio skorzystać z drugiej interpretacji wzoru pudełkowego: mamy tu wybrać 10 przedmiotów spośród 4 rozróżnialnych typów, przy czym powtórzenia są dopuszczalne. Zatem wynikiem jest

$$\binom{10+4-1}{4-1} = \binom{13}{3}.$$

Podział zbioru i zliczanie permutacji - wyjaśnienie

Czasem mamy do czynienia ze zbiorami, które się dzielą na kilka części - poszczególne części są rozróżnialne, ale elementy wewnątrz tych części już nie.

Podział zbioru i zliczanie permutacji - wyjaśnienie

Czasem mamy do czynienia ze zbiorami, które się dzielą na kilka części - poszczególne części są rozróżnialne, ale elementy wewnątrz tych części już nie. Na przykład możemy rozważyć zbiór kulek identycznych we wszystkim poza kolorem: 3 są czerwone, 2 są niebieskie i 1 jest zielona.

Podział zbioru i zliczanie permutacji - wyjaśnienie

Czasem mamy do czynienia ze zbiorami, które się dzielą na kilka części - poszczególne części są rozróżnialne, ale elementy wewnątrz tych części już nie. Na przykład możemy rozważyć zbiór kulek identycznych we wszystkim poza kolorem: 3 są czerwone, 2 są niebieskie i 1 jest zielona. Wtedy naturalnym podziałem tego zbioru na bloki jest: blok czerwonych kulek, blok niebieskich kulek, blok zielonych kulek.

Podział zbioru i zliczanie permutacji - wyjaśnienie

Czasem mamy do czynienia ze zbiorami, które się dzielą na kilka części - poszczególne części są rozróżnialne, ale elementy wewnątrz tych części już nie. Na przykład możemy rozważyć zbiór kulek identycznych we wszystkim poza kolorem: 3 są czerwone, 2 są niebieskie i 1 jest zielona. Wtedy naturalnym podziałem tego zbioru na bloki jest: blok czerwonych kulek, blok niebieskich kulek, blok zielonych kulek. Jeśli chcemy permutować, czyli ustawiać w kolejności te kulki, nie możemy liczby permutacji oznaczyć po prostu przez 6!, bo zamiana miejscami np. 2 czerwonych kulek nie tworzy nowej permutacji!

Podział zbioru i zliczanie permutacji - wyjaśnienie

Czasem mamy do czynienia ze zbiorami, które się dzielą na kilka części - poszczególne części są rozróżnialne, ale elementy wewnątrz tych części już nie. Na przykład możemy rozważyć zbiór kulek identycznych we wszystkim poza kolorem: 3 są czerwone, 2 są niebieskie i 1 jest zielona. Wtedy naturalnym podziałem tego zbioru na bloki jest: blok czerwonych kulek, blok niebieskich kulek, blok zielonych kulek. Jeśli chcemy permutować, czyli ustawiać w kolejności te kulki, nie możemy liczby permutacji oznaczyć po prostu przez 6!, bo zamiana miejscami np. 2 czerwonych kulek nie tworzy nowej permutacji! Dlatego potrzebujemy innego wzoru.

Podział zbioru i zliczanie permutacji - definicja

Podział zbioru

Podział zbioru S to rodzina jego parami rozłącznych podzbiorów, których sumą jest sam zbiór S. Rozłączne podzbiory na które dzielimy S nazywamy *blokami* podziału.

Podział zbioru i zliczanie permutacji - definicja

Podział zbioru

Podział zbioru S to rodzina jego parami rozłącznych podzbiorów, których sumą jest sam zbiór S. Rozłączne podzbiory na które dzielimy S nazywamy *blokami* podziału.

Twierdzenie o zliczaniu permutacji

Założmy, że zbiór n przedmiotów został podzielony na k bloków mających odpowiednio $n_1, \ldots, n_k$ elementów $(n = n_1 + \ldots + n_k)$. Dwa przedmioty są tego samego typu, jeśli należą do tego samego bloku danego podziału. Dwie permutacje są rozróżnialne, jeśli na co najmniej jednym miejscu stoją w nich elementy różnych typów. Wtedy liczba rozróżnialnych permutacji naszego zbioru wynosi:

$$\frac{n!}{n_1!n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

Zliczanie permutacji - przykład

Zadanie

Kapelusz zawiera karteczki z kolejnymi literami słów a) PAWEŁ b) BARNABA. Karteczki są pojedynczo wyjmowane z kapelusza i układane w takiej kolejności, w jakiej zostały wyciągnięte. Ile różnych słów (tj. ciągów liter odpowiedniej długości) można w taki sposób otrzymać? Dwa słowa uznajemy za różne, jeśli choć w jednym miejscu mają one różne litery.

Zliczanie permutacji - przykład

Zadanie

Kapelusz zawiera karteczki z kolejnymi literami słów a) PAWEŁ b) BARNABA. Karteczki są pojedynczo wyjmowane z kapelusza i układane w takiej kolejności, w jakiej zostały wyciągnięte. Ile różnych słów (tj. ciągów liter odpowiedniej długości) można w taki sposób otrzymać? Dwa słowa uznajemy za różne, jeśli choć w jednym miejscu mają one różne litery.

Oczywiście, w przypadku a) mamy 5 różnych liter, więc można ułożyć z nich $5! = 120$ słów (tyle, ile jest ich permutacji).

Zliczanie permutacji - przykład

Zadanie

Kapelusz zawiera karteczki z kolejnymi literami słów a) PAWEŁ b) BARNABA. Karteczki są pojedynczo wyjmowane z kapelusza i układane w takiej kolejności, w jakiej zostały wyciągnięte. Ile różnych słów (tj. ciągów liter odpowiedniej długości) można w taki sposób otrzymać? Dwa słowa uznajemy za różne, jeśli choć w jednym miejscu mają one różne litery.

W przypadku b) karteczki dzielą się na 4 typy: 2 karteczki B, 3 karteczki A oraz po jednej karteczce R i N. Jeśli zamienimy miejscami karteczki tego samego typu, ułożone słowo się nie zmieni.

Zliczanie permutacji - przykład

Zadanie

Kapelusz zawiera karteczki z kolejnymi literami słów a) PAWEŁ b) BARNABA. Karteczki są pojedynczo wyjmowane z kapelusza i układane w takiej kolejności, w jakiej zostały wyciągnięte. Ile różnych słów (tj. ciągów liter odpowiedniej długości) można w taki sposób otrzymać? Dwa słowa uznajemy za różne, jeśli choć w jednym miejscu mają one różne litery.

W przypadku b) karteczki dzielą się na 4 typy: 2 karteczki B, 3 karteczki A oraz po jednej karteczce R i N. Jeśli zamienimy miejscami karteczki tego samego typu, ułożone słowo się nie zmieni.Zatem zgodnie z twierdzeniem o zliczaniu permutacji, rozwiązaniem jest:

$$\frac{7!}{3!2!1!1!} = 420.$$

Zliczanie podziałów

Innym aspektem tego samego zagadnienia jest zliczanie nie permutacji rozróżnialnych pewnym podziałem, ale samych podziałów.

Podział uporządkowany

Podział uporządkowany zbioru S to ciąg $(A_1, \ldots, A_k)$, którego elementy tworzą podział S. Istotna jest kolejność w jakiej występują zbiory A_i, ale nie kolejność elementów wewnątrz tych zbiorów.

Twierdzenie o zliczaniu podziałów uporządkowanych

Jeśli dany zbiór ma n elementów i jeśli $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, to istnieje

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

podziałów uporządkowanych $(A_1, \ldots, A_k)$ tego zbioru takich, że $|A_i| = n_i$ dla $i = 1, \ldots, k$.

Zliczanie podziałów - objaśnienie

Twierdzenie powyższe działa, gdy grupę obiektów (przedmiotów, osób itp.) mamy podzielić na części, z których każda część odróżnia się od innych. Zazwyczaj kolejność uporządkowania zbiorów podziału nie ma znaczenia - ważne, że te zbiory są istotnie rozróżnialne.

Zliczanie podziałów - przykład

Zadanie

Na ile sposobów można spośród 20-osobowej grupy utworzyć 3 rozłączne komisje, jeśli muszą mieć, odpowiednio, 3,5 i 7 członków?

Zliczanie podziałów - przykład

Zadanie

Na ile sposobów można spośród 20-osobowej grupy utworzyć 3 rozłączne komisje, jeśli muszą mieć, odpowiednio, 3,5 i 7 członków?

Po pierwsze, zauważmy, ze same komisje nie tworzą podziału uporządkowanego bo suma liczby ich członków nie wynosi 20.

Zliczanie podziałów - przykład

Zadanie

Na ile sposobów można spośród 20-osobowej grupy utworzyć 3 rozłączne komisje, jeśli muszą mieć, odpowiednio, 3,5 i 7 członków?

Po pierwsze, zauważmy, ze same komisje nie tworzą podziału uporządkowanego bo suma liczby ich członków nie wynosi 20. Dlatego tak naprawdę rozważamy podział tej grupy na 4 zbiory: A_1 - członków 3-osobowej komisji, A_2 - członków 5-osobowej komisji, A_3 - członków 7-osobowej komisji i A_4 - osoby spoza komisji (których jest 5).

Zliczanie podziałów - przykład

Zadanie

Na ile sposobów można spośród 20-osobowej grupy utworzyć 3 rozłączne komisje, jeśli muszą mieć, odpowiednio, 3,5 i 7 członków?

Po pierwsze, zauważmy, ze same komisje nie tworzą podziału uporządkowanego bo suma liczby ich członków nie wynosi 20. Dlatego tak naprawdę rozważamy podział tej grupy na 4 zbiory: A_1 - członków 3-osobowej komisji, A_2 - członków 5-osobowej komisji, A_3 - członków 7-osobowej komisji i A_4 - osoby spoza komisji (których jest 5).Na mocy twierdzenia o zliczaniu podziałów otrzymujemy wynik:

$$\frac{20!}{3!5!7!5!}.$$

Zliczanie podziałów - przykład 2

Zadanie

Rozdanie brydżowe to podział uporządkowany talii 52 kart na 4 zbiory, po 13 kart w każdym.
a) Ile jest możliwych rozdań brydżowych?
b) Ile jest rozdań brydżowych takich, że każdy z graczy otrzyma jednego asa?

Zliczanie podziałów - przykład 2

Zadanie

Rozdanie brydżowe to podział uporządkowany talii 52 kart na 4 zbiory, po 13 kart w każdym.
a) Ile jest możliwych rozdań brydżowych?
b) Ile jest rozdań brydżowych takich, że każdy z graczy otrzyma jednego asa?

W zadaniu a) po prostu wstawiamy do znanego wzoru:

$$\frac{52!}{(13!)^4}.$$

Zliczanie podziałów - przykład 2

Zadanie

Rozdanie brydżowe to podział uporządkowany talii 52 kart na 4 zbiory, po 13 kart w każdym.
b) Ile jest rozdań brydżowych takich, że każdy z graczy otrzyma jednego asa?

Podpunkt b) wymaga ciut więcej pracy.

Zliczanie podziałów - przykład 2

Zadanie

Rozdanie brydżowe to podział uporządkowany talii 52 kart na 4 zbiory, po 13 kart w każdym.
b) Ile jest rozdań brydżowych takich, że każdy z graczy otrzyma jednego asa?

Podpunkt b) wymaga ciut więcej pracy. Najpierw rozważamy rozdzielenie 4 asów.

Zliczanie podziałów - przykład 2

Zadanie

Rozdanie brydżowe to podział uporządkowany talii 52 kart na 4 zbiory, po 13 kart w każdym.
b) Ile jest rozdań brydżowych takich, że każdy z graczy otrzyma jednego asa?

Podpunkt b) wymaga ciut więcej pracy. Najpierw rozważamy rozdzielenie 4 asów. Jest to po prostu ustawienie ich w kolejności (permutacja) i przydzielenie pierwszego asa pierwszemu graczowi, drugiego drugiemu itd.

Zliczanie podziałów - przykład 2

Zadanie

Rozdanie brydżowe to podział uporządkowany talii 52 kart na 4 zbiory, po 13 kart w każdym.
b) Ile jest rozdań brydżowych takich, że każdy z graczy otrzyma jednego asa?

Podpunkt b) wymaga ciut więcej pracy. Najpierw rozważamy rozdzielenie 4 asów. Jest to po prostu ustawienie ich w kolejności (permutacja) i przydzielenie pierwszego asa pierwszemu graczowi, drugiego drugiemu itd. Zatem mamy 4! możliwości. Pozostałe 48 kart poddajemy podziałowi uporządkowanemu na 4 zbiory po 12 kart (żeby każdy gracz, razem z asem, miał po 13 kart).

Zliczanie podziałów - przykład 2

Zadanie

Rozdanie brydżowe to podział uporządkowany talii 52 kart na 4 zbiory, po 13 kart w każdym.
b) Ile jest rozdań brydżowych takich, że każdy z graczy otrzyma jednego asa?

Podpunkt b) wymaga ciut więcej pracy. Najpierw rozważamy rozdzielenie 4 asów. Jest to po prostu ustawienie ich w kolejności (permutacja) i przydzielenie pierwszego asa pierwszemu graczowi, drugiego drugiemu itd. Zatem mamy 4! możliwości. Pozostałe 48 kart poddajemy podziałowi uporządkowanemu na 4 zbiory po 12 kart (żeby każdy gracz, razem z asem, miał po 13 kart).Z twierdzenia o podziałach i prawa iloczynu otrzymujemy wynik:

$$4! \cdot \frac{48!}{(12!)^4}.$$

Prawdopodobieństwo dyskretne - przypomnienie

Wyniki ostatniego zadania wydają się być na tyle duże, że nieprzydatne do praktycznych zastosowań. Jednak, jeśli przypomnimy sobie szkolną definicję prawdopodobieństwa, możemy dzięki nim obliczyć prawdopodobieństwo, że w rozdaniu brydżowym każdy z graczy będzie mieć asa.

Prawdopodobieństwo dyskretne - przypomnienie

Wyniki ostatniego zadania wydają się być na tyle duże, że nieprzydatne do praktycznych zastosowań. Jednak, jeśli przypomnimy sobie szkolną definicję prawdopodobieństwa, możemy dzięki nim obliczyć prawdopodobieństwo, że w rozdaniu brydżowym każdy z graczy będzie mieć asa.Oczywiście, to prawdopodobieństwo jest ilorazem liczby rozdań, w których każdy ma asa, przez liczbę wszystkich możliwych rozdań:

$$4! \cdot \frac{48!}{(12!)^4} : \frac{52!}{(13!)^4} = \frac{4! \cdot 13^4}{49 \cdot 50 \cdot 51 \cdot 52} \approx 10,5\%.$$

Prawdopodobieństwo dyskretne - przypomnienie

Wyniki ostatniego zadania wydają się być na tyle duże, że nieprzydatne do praktycznych zastosowań. Jednak, jeśli przypomnimy sobie szkolną definicję prawdopodobieństwa, możemy dzięki nim obliczyć prawdopodobieństwo, że w rozdaniu brydżowym każdy z graczy będzie mieć asa.Oczywiście, to prawdopodobieństwo jest ilorazem liczby rozdań, w których każdy ma asa, przez liczbę wszystkich możliwych rozdań:

$$4! \cdot \frac{48!}{(12!)^4} : \frac{52!}{(13!)^4} = \frac{4! \cdot 13^4}{49 \cdot 50 \cdot 51 \cdot 52} \approx 10,5\%.$$

Czyli „sprawiedliwy” podział asów jest znacznie mniej prawdopodobny, niż wydawałoby się intuicyjnie.