4d. Sieci i przepływy

Grzegorz Kosiorowski

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

Sieć

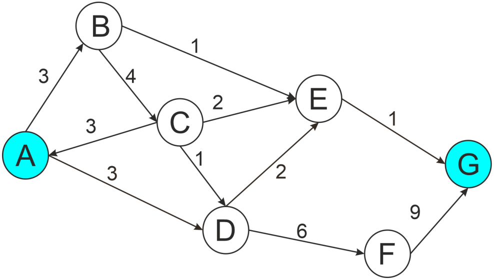
Sieć

Sieć jest to graf skierowany z nieujemnymi wagami (funkcja wag jest w tym wypadku zwana *przepustowością sieci*) oraz dwoma wyróżnionymi wierzchołkami, które są odpowiednio nazywane *źródłem* i *ujściem* sieci.

Przykłady

- Wodociągi.
- Sieć komputerowa.
- Sieć kolejowa lub drogowa.

Przykładowa sieć



A jest źródłem, a *G* - ujściem sieci.
W takiej sieci podstawowe jest pytanie: przy danej przepustowości łączy, ile można przesłać (wody, danych, towarów) od źródła do ujścia (w jednostce czasu)?

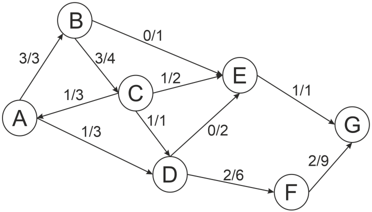
Przepływ

Przepływ

Przepływ sieci (V, E) z przepustowością c to funkcja $f : E \to [0, \infty)$ spełniająca warunki:
1) $0 \leqslant f(v, w) \leqslant c(v, w)$ dla każdej krawędzi (v, w) (tj. przepływ wzdłuż krawędzi nie przekracza jej przepustowości).
2) $\sum_{x \in V, (x,v) \in E} f(x, v) = \sum_{x \in V, (v,x) \in E} f(v, x)$ dla każdego wierzchołka v poza źródłem s i ujściem t. Równość ta oznacza, że sumaryczna wartość tego, co wpływa do wierzchołka jest równa sumarycznej wartości tego, co zeń wypływa.
3) $\sum_{x \in V}(f(s, x) - f(x, s)) = \sum_{x \in V}(f(x, t) - f(t, x))$ tzn. sumaryczna wartość tego, co wypływa ze źródła musi być równa sumarycznej wartości tego, co wpływa do ujścia. Wartość ta będzie określana *wartością przepływu* f.

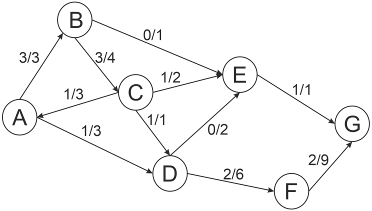
Przepływ

Intuicyjnie, przepływ to przyporządkowanie każdej krawędzi sieci wartości tego, co przez nią przepływa. Oczywiście, nie może być ona większa od przepustowości krawędzi (bo by się nie zmieściło w „rurze" - notujemy to jako a/b gdzie a jest przepływem przez krawędź, a b jej przepustowością), nic nie może zatrzymywać się w wierzchołkach różnych od źródła i ujścia (bo „woda" by się spiętrzała) i tyle „wody" wchodzi do układu przez źródło, co uchodzi przez „ujście" (bo inaczej ilość „wody" w sieci by się zmieniała).



Przepływ o wartości 3 z A do G (uwaga - pozornie z A wychodzi 4!).

Przepływ



Zazwyczaj w tego typu sytuacjach poszukujemy *przepływu maksymalnego*, czyli takiego, żeby jego wartość była największa z możliwych. Oczywiście, przepływ przedstawiony powyżej nie jest maksymalny: można go zwiększyć np. kierując kolejną jednostkę wody z A do D i dalej przez F do ujścia. Wartość maksymalnego przepływu jest w tym przypadku na pewno nie większa od 6 (bo tyle wynosi suma przepustowości krawędzi wychodzących ze źródła, mimo, że suma przepustowości krawędzi wpadających do ujścia wynosi 10).

Sieć residualna

Sieć residualna

Siecią residualną dla sieci $G = (V, E)$ z przepustowością c i przepływem f, nazywamy sieć $G_f = (V, E_f)$, gdzie E_f jest zdefiniowane następująco:

$$E_f = \{(u, v) \in V \times V : c_f(u, v) > 0\},$$

gdzie $c_f(u, v)$ oznacza tzw. *przepustowość residualną* dla krawędzi (u, v). Ta natomiast jest dana wzorem:

$$c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v),$$

gdzie: jeśli $(u, v) \notin E$ to $c(u, v) = 0$, oraz $f(v, u) = -a$, gdy $f(u, v) = a$. Krawędzie należące do E_f, nazywa się *krawędziami residualnymi*.

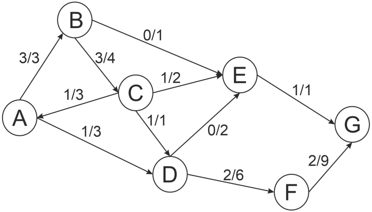
Sieć residualna

Bardziej intuicyjnie, przepustowość residualna dla pewnej krawędzi (u, v), oznacza, o ile można zwiększyć przepływ przez nią, tak jednak, aby nie przekroczył on jej przepustowości. Do sieci residualnej natomiast należą te krawędzie, przez które przepływ można zwiększyć. Przykładowo, jeśli między wierzchołkami sieci u i v jest krawędź o przepustowości 5, na której zdefiniowano przepływ o wartości 2, to krawędź ta jest krawędzią residualną o przepustowości residualnej 3. Jeśli przez tę samą krawędź przepuszczono by przepływ o wartości 5, ta krawędź przestałaby należeć do sieci residualnej (bo już nic więcej nie da się tamtędy przecisnąć).

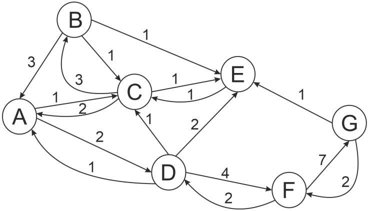
Sieć residualna - powstawanie nowych krawędzi

Mniej intuicyjne, ale ważne jest to, że mogą się w sieci residualnej pojawić krawędzie, których nie było w sieci wyjściowej. Wróćmy do przykładu: między wierzchołkami sieci u i v jest krawędź o przepustowości 5, na której zdefiniowano przepływ o wartości 2. Wtedy, poza krawędzią (u, v) o przepustowości 3 pojawi się w sieci residualnej krawędź (v, u) o przepustowości 2, symbolizująca możliwość „cofnięcia" przepływu o wartości 2 przez tę krawędź. Dzięki temu, można „poprawiać" na sieci residualnej przepływ, który chwilowo „popłynie" nieoptymalną ścieżką.

Sieć residualna - przykład



Na górze przepływ, na dole odpowiadająca mu sieć residualna. Dzięki niej można szukać kolejnych dróg zwiększania przepływu ze źródła do ujścia.



Ścieżka powiększająca

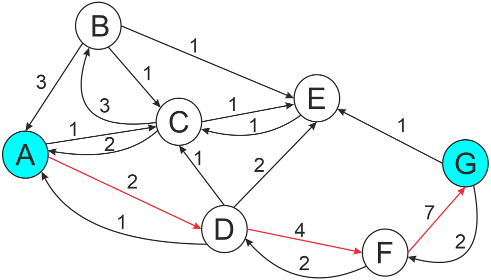
Ścieżka powiększająca

Ścieżką powiększającą dla sieci G z przepływem f nazywamy dowolną drogę ze źródła do ujścia w sieci residualnej dla G. *Przepustowość residualną ścieżki* powiększającej p, dla sieci G, określamy wzorem:

$$c_f(p) = \min\{c_f(u, v) : (u, v) \in p\}.$$

Innymi słowy, ścieżka powiększająca to droga wzdłuż której można zwiększyć przepływ, a przepustowość residualna ścieżki jest to wartość, o jaką maksymalnie można zwiększyć przepływ przez wszystkie krawędzie należące do ścieżki p.

Ścieżka powiększająca - przykład



W tej sieci residualnej, ścieżka powiększająca jest zaznaczona na czerwono. Jej przepustowość residualna wynosi 2, gdyż jest to najmniejsza z przepustowości residualnych wszystkich krawędzi tej ścieżki.

Wyznaczanie maksymalnego przepływu

Algorytmy wyznaczania maksymalnego przepływu opierają się na tzw. metodzie Forda-Fulkersona, czyli na stopniowym zwiększaniu przepływu wzdłuż każdej drogi prostej od źródła do ujścia. Sednem każdej takiej operacji jest warunek: jeśli istnieje ścieżka powiększająca, zwiększ maksymalnie przepływ wzdłuż tej ścieżki. Jako przykład, pokażemy jeden (nie najszybszy, ale najprostszy) ze sposobów wyznaczania maksymalnego przepływu: algorytm Edmondsa-Karpa. Jego ideą jest znajdowanie w każdym kroku najkrótszej (pod względem liczby krawędzi) ścieżki powiększającej.

Algorytm Edmondsa-Karpa - część I

Algorytm Edmondsa-Karpa

Dane: Sieć (V, E) z wyróżnionym źródłem $s \in V$ i ujściem $t \in V$, z funkcją przepustowości c.
Zmienne: funkcja przepływu $f : V \times V \to \mathbb{R}$, $r : V \times V \to \mathbb{R}$ - funkcja przepustowości residualnej, p - droga prosta w sieci, a-liczba.

- I. Dla każdej pary $(u, v) \in V \times V$, $f(u, v) := 0$, $r(u, v) := c(u, v)$, gdy $(u, v) \in E$ oraz $r(u, v) := 0$ w przeciwnym wypadku. $\{$w każdym momencie będzie $r(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$, gdy $(u, v) \in E\}$

Algorytm Edmondsa-Karpa - część II

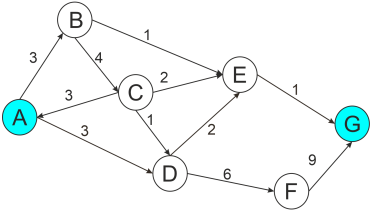
Algorytm Edmondsa-Karpa

- II. Dopóki istnieje jakakolwiek ścieżka powiększająca wykonuj:
- II.1.Znajdź najkrótszą ze względu na liczbę krawędzi ścieżkę powiększającą (np. z algorytmu przeszukiwania wszerz). Oznacz tę najkrótszą ścieżkę powiększającą przez p.
- II.2. $a := \min\{r(u,v) : (u,v)$ należy do $p\}$.
- II.3. Dla każdej krawędzi (u,v) należącej do p wykonaj:
  $f(u,v) := f(u,v) + a$, $f(v,u) := f(v,u) - a$,
  $r(u,v) := r(u,v) - a$, $r(v,u) := r(v,u) + a$.
- **Rezultat**: Funkcja zadana przez f na zbiorze E jest funkcją przepływu o maksymalnej wartości dla sieci (V,E).

Algorytm Edmondsa-Karpa - wstępne uwagi

W trakcie wykonywania tego algorytmu, mogą się pojawić możliwości tworzenia „przepływów ujemnych" tj. wybierania ścieżek powiększających w sieciach residualnych zawierających krawędzie, których w oryginalnej sieci nie było. To nic nie przeszkadza - wynik działania algorytmu i tak będzie dobry.
Algorytm ten można przerobić tak, by rozwiązywał też sytuację z wieloma źródłami i ujściami. Wystarczy do sieci dołożyć jedno „superźródło" i jedno „superujście" oraz krawędzie o nieskończonej przepustowości łączące je odpowiednio z wszystkimi źródłami i wszystkimi ujściami, a po przejściu algorytmu Edmondsa-Karpa usunąć te „dodatki".

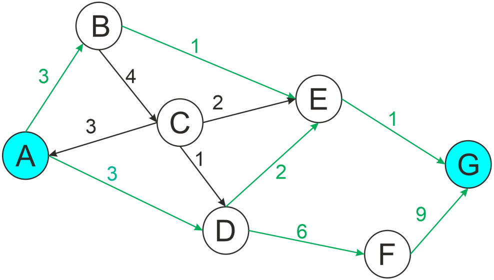
Algorytm Edmondsa-Karpa - przykład



Spróbujemy zastosować algorytm Edmondsa-Karpa dla powyższej sieci ze źródłem A i ujściem G. Przedstawię tutaj sposób postępowania przyjęty w ramach tego kursu - obowiązujący na sprawdzianie/egzaminie. W każdym kroku wybieramy ścieżkę powiększającą i sprawdzamy jej przepustowość residualną. Działanie algorytmu zapisujemy w takiej tabeli:

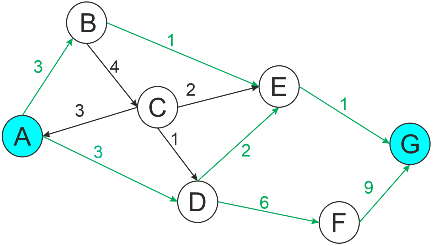
Nr	ścieżka powiększająca	przepustowość ścieżki	alternatywy
1			
2			

Algorytm Edmondsa-Karpa - krok 1



W pierwszym kroku siecią residualną jest po prostu zadana sieć. Możemy wybrać jedną z 3 minimalnych ścieżek powiększających: ABEG, ADEG i ADFG - wszystkie są złożone z 3 krawędzi. Nie możemy wybrać ścieżki np. ABCDFG, bo nie jest ona najkrótsza pod względem liczby krawędzi.

Algorytm Edmondsa-Karpa - krok 1

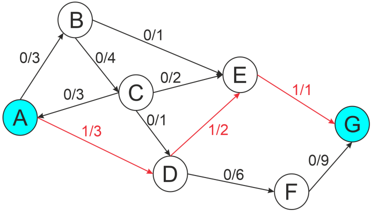


Załóżmy, że wybieramy ścieżkę ADEG.
Teraz musimy zmierzyć jej przepustowość residualną - będzie to przepustowość residualna „najwęższej" z jej krawędzi. Krawędź EG ma przepustowość 1, więc taka jest też przepustowość całej ścieżki.
Wyniki 1 kroku zapisujemy w takiej tabeli:

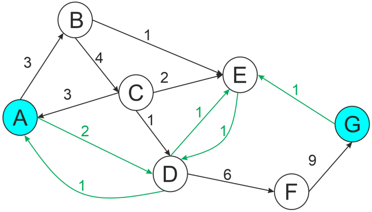
Nr	ścieżka powiększająca	przepustowość ścieżki	alternatywy
1	ADEG	1	ADFG,ABEG
2			

Algorytm Edmondsa-Karpa - krok 1

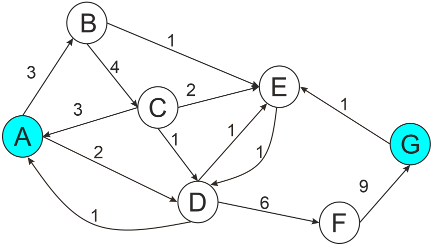
Przepływ z zaznaczoną ostatnią zmianą w tym momencie wygląda tak:



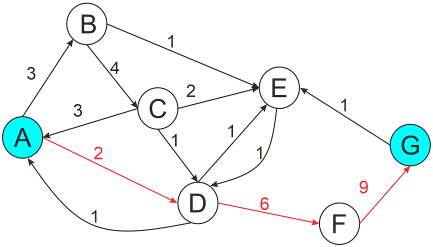
A sieć residualna tak:



Algorytm Edmondsa-Karpa - krok 2



W tej sieci residualnej znajdujemy najkrótszą ścieżkę powiększającą:

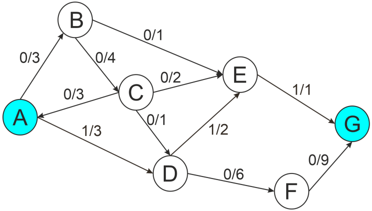


Algorytm Edmondsa-Karpa - krok 2

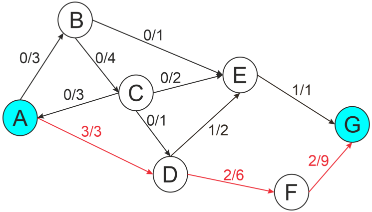
Zapisujemy zatem w tabeli nasz wybór ścieżki ADFG, jej przepustowość residualną (która wynosi 2 ze względu na użycie krawędzi AD) i fakt, że w tym kroku nie mieliśmy wyboru.

Nr	ścieżka powiększająca	przepustowość ścieżki	alternatywy
1	ADEG	1	ADFG,ABEG
2	ADFG	2	-

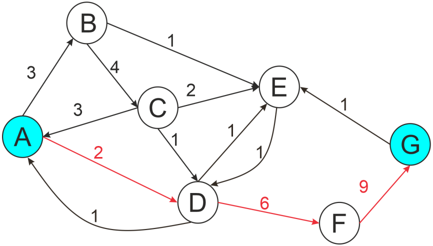
Algorytm Edmondsa-Karpa - krok 2



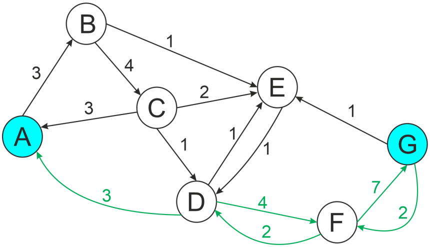
Aktualizujemy też przepływ z wersji górnej do dolnej (przez dodanie 2 wzdłuż ADFG):



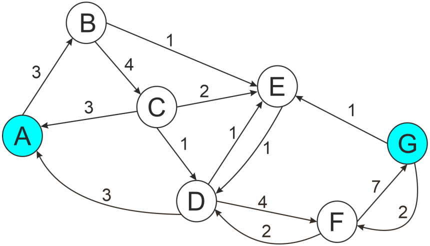
Algorytm Edmondsa-Karpa - krok 2



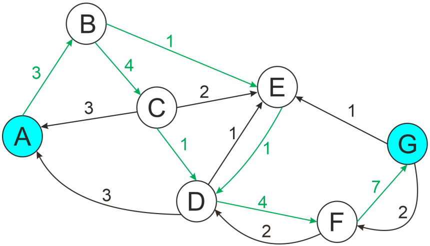
A sieć residualna zmienia się tak:



Algorytm Edmondsa-Karpa - krok 3

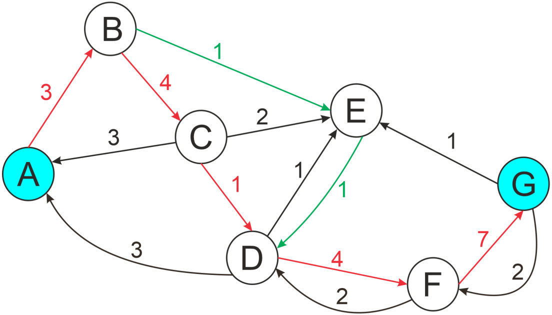


W tej sieci residualnej znajdujemy najkrótsze ścieżki powiększające:



Algorytm Edmondsa-Karpa - krok 3

Tym razem mamy dwie do wyboru. Na przykład wybieramy ABCDFG:

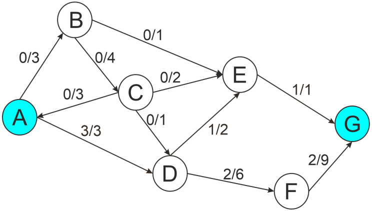


Algorytm Edmondsa-Karpa - krok 3

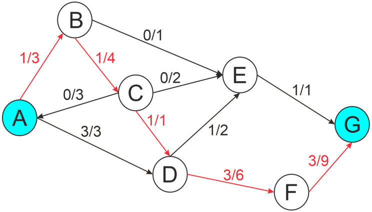
Zapisujemy zatem w tabeli nasz wybór ścieżki, jej przepustowość residualną (która wynosi 1 ze względu na krawędź CD) i możliwy alternatywny wybór.

Nr	ścieżka powiększająca	przepustowość ścieżki	alternatywy
3	ABCDFG	1	ABEDFG

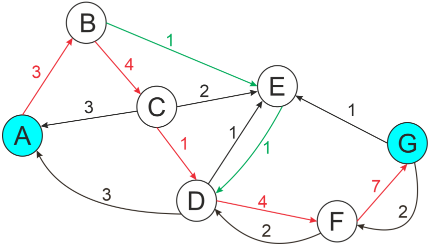
Algorytm Edmondsa-Karpa - krok 3



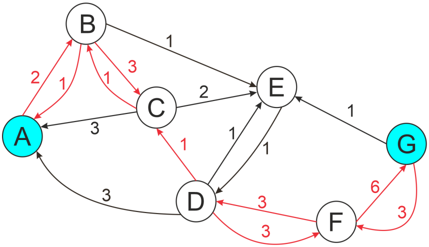
Aktualizujemy też przepływ z wersji górnej do dolnej (przez dodanie 1 wzdłuż ABCDFG):



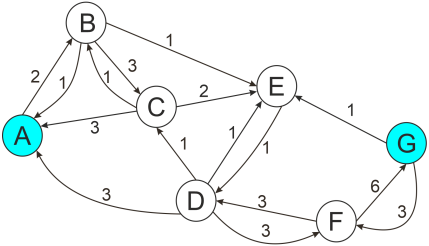
Algorytm Edmondsa-Karpa - krok 3



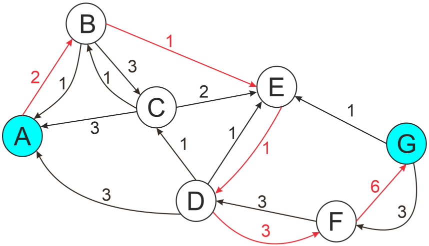
A sieć residualna zmienia się tak:



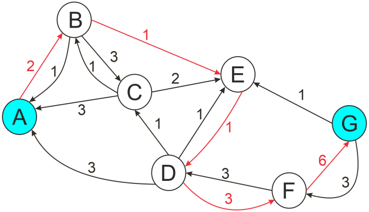
Algorytm Edmondsa-Karpa - krok 4



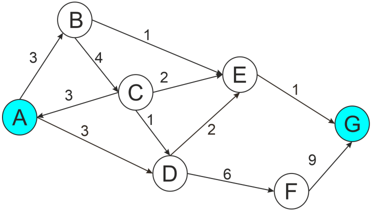
W tej sieci residualnej znajdujemy najkrótszą ścieżkę powiększającą:



Algorytm Edmondsa-Karpa - krok 4



Tym razem znów nie mamy wyboru, ale ciekawe jest, że ta ścieżka (ABEDFG) nie istnieje w wyjściowej sieci, bo krawędź DE jest skierowana w przeciwną stronę niż w tej ścieżce.

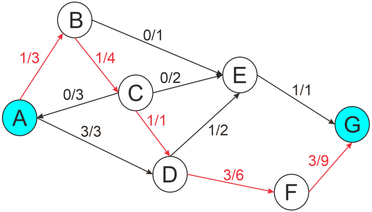


Algorytm Edmondsa-Karpa - krok 4

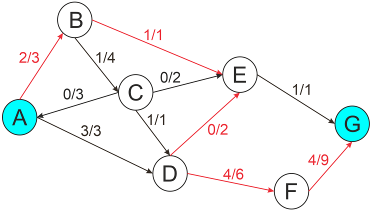
Użycie tej „wirtualnej” krawędzi ED w algorytmie symbolizuje wycofanie się z wykorzystania krawędzi DE w ostatecznym przepływie. Zapisujemy w tabeli nasz wybór ścieżki, jej przepustowość residualną (która wynosi 1 ze względu na krawędź BE) i brak wyboru w tym kroku.

Nr	ścieżka powiększająca	przepustowość ścieżki	alternatywy
4	ABEDFG	1	-

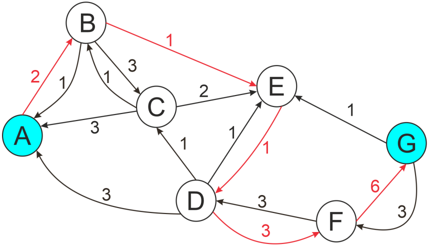
Algorytm Edmondsa-Karpa - krok 4



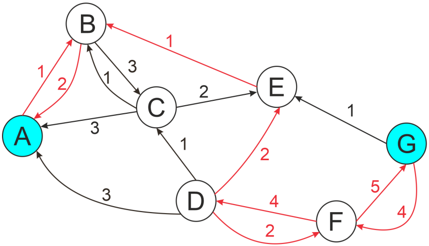
Aktualizujemy też przepływ z wersji górnej do dolnej (przez dodanie 1 wzdłuż ABEDFG, co w wypadku krawędzi DE sprowadza się do odjęcia jednostki przepływu):



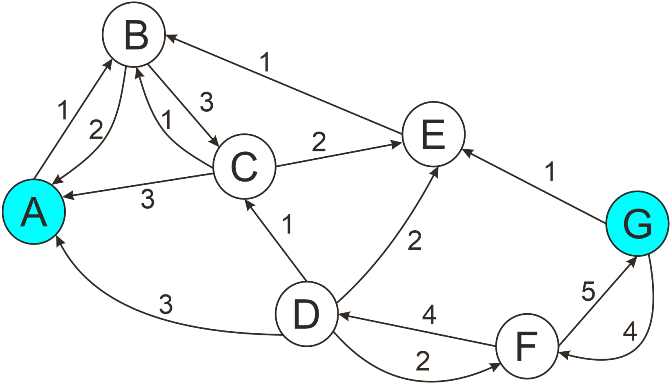
Algorytm Edmondsa-Karpa - krok 4



A sieć residualna zmienia się tak:

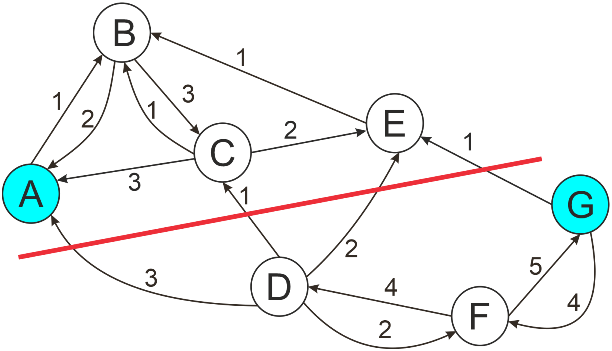


Algorytm Edmondsa-Karpa - zakończenie



Zauważmy, że w tej nowej sieci residualnej nie da się już znaleźć nowej ścieżki powiększającej z A do G.

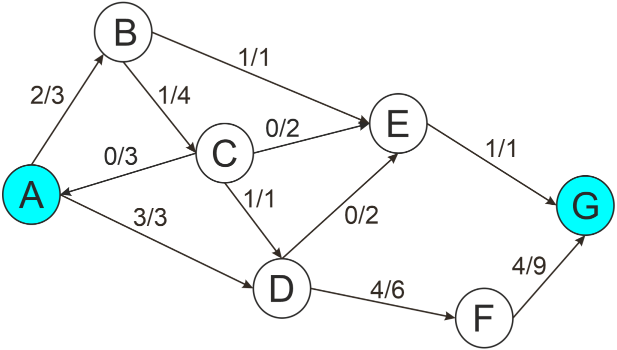
Algorytm Edmondsa-Karpa - zakończenie



Zauważmy, że w tej nowej sieci residualnej nie da się już znaleźć nowej ścieżki powiększającej z A do G. W szczególności, nie da się przejść z części nad czerwoną kreską do części pod nią.

Algorytm Edmondsa-Karpa - zakończenie

Rozwiązaniem zadania jest zatem przepływ maksymalny:



Algorytm Edmondsa-Karpa - zakończenie

...oraz tabela działania algorytmu:

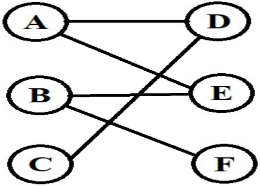
Nr	ścieżka powiększająca	przepustowość ścieżki	alternatywy
1	ADEG	1	ADFG,ABEG
2	ADFG	2	-
3	ABCDFG	1	ABEDFG
4	ABEDFG	1	-

Powinniśmy podać też wartość maksymalnego przepływu. Możemy odczytać ją z wykresu (sprawdzając ile „wody” wypływa ze źródła lub wpływa do ujścia), albo po prostu dodać liczby z 3 kolumny tabeli działania algorytmu.Tak, czy inaczej, wychodzi 5.

Algorytm Edmondsa-Karpa - uwagi końcowe

- Podsumowując, rozwiązaniem zadania na zastosowanie algorytmu Edmondsa-Karpa jest: narysowanie grafu przedstwiającego przepływ maksymalny, tabeli działania algorytmu i podanie wartości maksymalnego przepływu. Dobrym zwyczajem, pomagającym uchronić się od błędów (szczególnie pominięcia możliwych ścieżek powiększających), jest narysowanie dodatkowo ostatniej postaci sieci residualnej.
- Zapis alternatyw w tabeli jest konieczny dla wykazania znajomości algorytmu.
- Czas działania algorytmu Edmondsa-Karpa (z uwzględnieniem algorytmu przeszukiwania wszerz) to teoretycznie $O(|V||E|^2)$ dla sieci $G = (V, E)$, aczkolwiek to jest bardzo pesymistyczne oszacowanie (osiągane jedynie dla bardzo szczególnych sieci). Zazwyczaj działa szybciej.

Zastosowanie



Ciekawym zastosowaniem wyznaczania przepływu maksymalnego w sieci jest wyznaczanie skojarzenia pełnego (a dokładniej: największego skojarzenia) w grafie dwudzielnym. Przypomnijmy, że graf dwudzielny $G = (V_1 \cup V_2, E)$ to taki, którego wierzchołki da się podzielić na dwa zbiory, wewnątrz których nie ma krawędzi grafu. Tutaj: $V_1 = \{A, B, C\}$, $V_2 = \{D, E, F\}$.

Skojarzenie pełne - przypomnienie

Skojarzenie to dobór wierzchołków w pary rozłączne.

Skojarzenie

Skojarzenie w grafie $G = (V, E)$ to podzbiór krawędzi $M \subset E(G)$, w którym żadne dwie $v_1v_2, u_1u_2 \in M$ nie są incydentne z tym samym wierzchołkiem (czyli M to zbiór rozłącznych par elementów połączonych krawędziami).

W szczególności w grafie dwudzielnym końce krawędzi należących do skojarzenia należą do różnych zbiorów V_1 i V_2.

Skojarzenie pełne

Skojarzenie pełne zbioru V_1 w grafie dwudzielnym $G = (V_1 \cup V_2, E)$ to skojarzenie, w którym każdy wierzchołek z V_1 jest skojarzony.

Skojarzenie największe

Pomocniczo wprowadzamy dodatkowe pojęcie:

Skojarzenie największe

Skojarzeniem największym zbioru V_1 w grafie dwudzielnym $\mathrm{G} = (V_1 \cup V_2, E)$ nazywamy takie skojarzenie, które zawiera najwięcej krawędzi ze wszystkich skojarzeń.

Graf może zawierać więcej niż jedno skojarzenie największe.
Każde skojarzenie pełne jest skojarzeniem największym, gdyż zawiera tyle samo elementów (ma tę samą moc) co zbiór V_1. Jeśli skojarzenie największe nie jest skojarzeniem pełnym (zawiera mniej elementów niż zbiór V_1) to skojarzenie pełne nie istnieje.

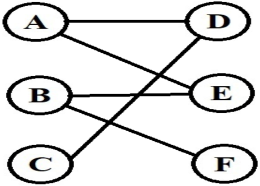
Algorytm wyznaczania skojarzenia największego

Skojarzenie największe

Dane: Graf dwudzielny $G = (V_1 \cup V_2, E)$.

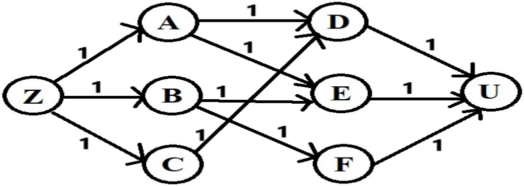
- I. Z grafu G stwórz graf skierowany $G' = (V', E')$ z wagami, $V' = V \cup \{Z, U\}$, E' składa się ze zbioru krawędzi E, skierowanych od V_1 do V_2, krawędzi prowadzących od Z (źródła) do wszystkich wierzchołków z V_1 oraz krawędzi prowadzących od wszystkich wierzchołków z V_2 do U (ujścia). Wszystkie krawędzie w G' mają wagę 1.
- II. Dla grafu G' wyznaczyć przepływ maksymalny na przykład algotytmem Edmondsa-Karpa.
- **Rezultat**: Wartość przepływu w grafie G to moc skojarzenia największego, należą do niego te krawędzie pomiędzy wierzchołkami z V_1 i V_2 na których przepływ maksymalny jest niezerowy.

Algorytm skojarzenia największego - przykład



Przeprowadzimy algorytm wyznaczania największego skojarzenia dla powyższego grafu G, gdzie $V_1 = \{A, B, C\}$, $V_2 = \{D, E, F\}$. W pierwszym kroku algorytmu generujemy graf G' przez skierowanie wszystkich istniejących krawędzi od V_1 do V_2, dodanie wierzchołka Z i poprowadzenie od niego krawędzi do wszystkich wierzchołków z V_1, dodanie wierzchołka U i poprowadzenie do niego krawędzi od wszystkich wierzchołków z V_2 oraz nadanie wszystkim krawędziom wagi 1.

Algorytm skojarzenia największego - przykład

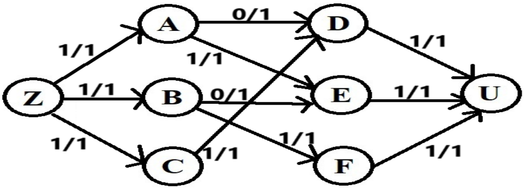


Powyżej graf G'. Wykonujemy dla niego algorytm Edmondsa-Karpa (ćwiczenie, przykładowe rozwiązanie na następnej stronie).

Algorytm skojarzenia największego - przykład

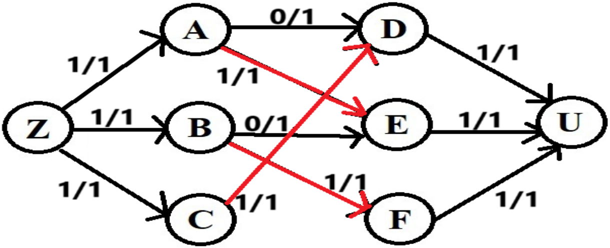
Przykładowa tabela algorytmu Edmondsa-Karpa i przepływ maksymalny dla grafu G'

Nr	ścieżka powiększająca	przepustowość	alternatywy
1	ZADU	1	ZAEU,ZBEU, ZBFU,ZCDU
2	ZBEU	1	ZBFU
3	ZCDAEBFU	1	-



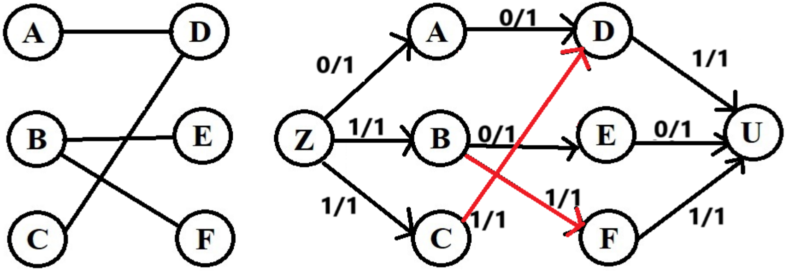
Przepływ maksymalny wynosi 3, więc tyle ile liczba wierzchołków z V_1. Zatem wszystkie zostaną skojarzone i skojarzenie największe dla tego grafu jest skojarzeniem pełnym.

Algorytm skojarzenia największego - przykład



Wybierając wszystkie krawędzie między wierzchołkami V_1 i V_2 (innymi słowy: ignorując incydentne z Z lub U) otrzymujemy skojarzenie największe (w tym przypadku pełne) w grafie G: $\{AE, BF, CD\}$.

Algorytm skojarzenia największego - przykład



Gdyby w wyjściowym grafie G brakowało krawędzi AE, założenia twierdzenia Halla nie byłyby spełnione (bo $\Phi(\{A, C\}) = \{D\}$), więc skojarzenie pełne by nie istniało. Nasz algorytm znalazłby wtedy jedno ze skojarzeń największych, złożone z dwóch krawędzi i w ten sposób wskazał, że skojarzenie pełne nie istnieje.