4a. Podstawowe pojęcia grafów skierowanych

Grzegorz Kosiorowski

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

Definicja

Grafy skierowane

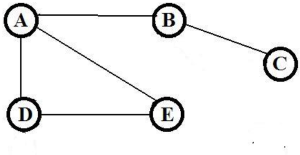
Grafem skierowanym lub *digrafem* nazywamy parę $G = (V, E)$, gdzie:
1) V jest zbiorem *wierzchołków* (*węzłów*, *punktów*)
2) E jest multizbiorem krawędzi skierowanych (które mogą się powtarzać), czyli elementów $V \times V$.

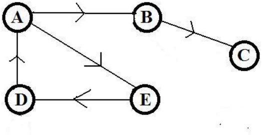
Krawędzie skierowane na rysunkach grafów przedstawiamy jako strzałki, a krawędzie takiego grafu domyślnie zapisujemy jako pary uporządkowane np. (u, v). W tej sytuacji mówimy, że krawędź (u, v) wychodzi z wierzchołka u, a wchodzi do wierzchołka v.
Jeśli w rysunku grafu skierowanego krawędź między wierzchołkami U i V nie ma zaznaczonej strzałki, oznacza to istnienie krawędzi skierowanych (U, V) i (V, U).

Naturalne zastosowania

- Drogi jednokierunkowe (w miastach, w obwodach elektrycznych, w wodociągach).
- Drogi z czasami przejazdu.
- Kroki procedury z kosztem wykonania.
- Łącza z przepustowościami.
- Siła oddziaływań międzycząsteczkowych.
- Wielkości przepływów ekonomicznych.
- Prawdopodobieństwo przejścia z jednego stanu do innego (np. łańcuchy Markowa w dynamice liniowej, wyszukiwarki internetowe).

Graf podstawowy





Graf podstawowy grafów po prawej.

Graf podstawowy

Grafem podstawowym grafu skierowanego lub z wagami nazywamy graf nieskierowany o tych samych wierzchołkach i krawędziach, przy czym w opisie krawędzi pomijamy ich kierunek i wagę.

Zależność pojęć dotyczących grafów skierowanych i nieskierowanych

Warto zauważyć, że w większości zagadnień można interpretować graf nieskierowany jako multigraf skierowany w którym każdą krawędź nieskierowaną UV zastępujemy dwiema krawędziami (U,V) i (V,U) skierowanymi w przeciwne strony (nie jest to równoważne z zależnością pomiędzy grafem skierowanym i jego grafem podstawowym.

Na kolejnych slajdach omówimy lub przypomnimy jak pojęcia zdefiniowane dla grafów nieskierowanych przenoszą się na grafy skierowane.

Sąsiedztwo wierzchołków i incydencja krawędzi z wierzchołkami w grafach skierowanych i z wagami są równoważne sąsiedztwu wierzchołków i incydencji krawędzi w ich grafie podstawowym. Z kolei izomorfizm grafów skierowanych wymaga zachowania kierunków krawędzi, a izomorfizm grafów z wagami wymaga zachowania wag.

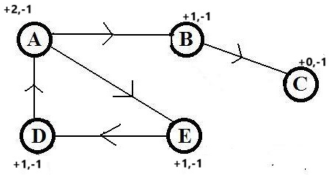
Zależność pojęć dotyczących grafów skierowanych i nieskierowanych

Definicje pętli, krawędzi wielokrotnej, grafu prostego, podgrafu, są identyczne dla grafu skierowanego i jego grafu podstawowego (z uwzględnieniem kierunku).
Drogi, ich długości, drogi zamknięte, proste, grafy acykliczne i cykle definiujemy tak samo jak dla grafów nieskierowanych, ale kolejne krawędzie muszą być zgodne z kierunkiem krawędzi grafu skierowanego.
Zamiast ogólnego stopnia wierzchołka, częściej przydatne są stopnie wejściowe i wyjściowe.

Stopnie wierzchołków w grafie skierowanym

Stopień wierzchołka

Stopniem wyjściowym v nazywamy liczbę $\deg^+ v$, oznaczającą liczbę krawędzi wychodzących z v. *Stopniem wejściowym* v nazywamy liczbę $\deg^- v$, oznaczającą liczbę krawędzi wchodzących do v. Generalnie, $\deg^+ v + \deg^- v = \deg v$.



Przy każdym wierzchołku zapisano jego stopnie: z plusem wyjściowy, z minusem wejściowy. Na przykład $\deg^+ A = 2, \ \deg^- A = 1$.

Lemat o uściskach dłoni dla grafów skierowanych

Lemat o uściskach dłoni dla grafów skierowanych

Dla grafu skierowanego $G = (V, E)$ zachodzi:

$$\sum_{v \in V} \deg^+ v = \sum_{v \in V} \deg^- v = |E|.$$

Twierdzenie Eulera dla grafów skierowanych

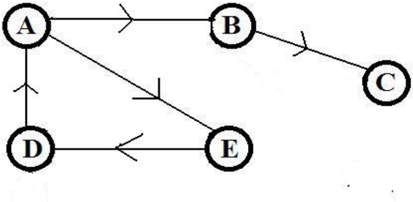
Jak twierdzenie Eulera wygląda dla grafów skierowanych?

Twierdzenie Eulera dla grafów skierowanych

Niech graf skierowany G będzie spójny (gdy go potraktujemy jako graf nieskierowany). Skierowana droga zamknięta w grafie G, przechodząca przez jego wszystkie krawędzie istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego wierzchołka v zachodzi $\deg^+ v = \deg^- v$.

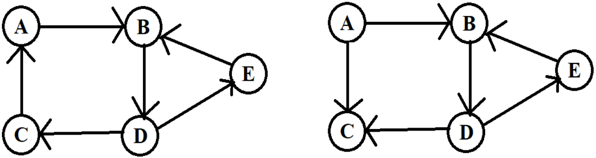
Algorytm do tego twierdzenia można opracować we własnym zakresie na podstawie algorytmu Fleury'ego.

Spójność i grafy skierowane



Mówimy, że graf skierowany jest spójny wtedy i tylko wtedy gdy spójny jest jego graf podstawowy. W tym sensie graf powyższy jest spójny.
Mosty i przeguby grafu skierowanego to również mosty i przeguby grafu podstawowego.

Spójność i grafy skierowane



Graf skierowany jest *silnie spójny* jeśli istnieje droga z każdego wierzchołka do każdego innego. Graf po lewej jest silnie spójny, graf po prawej nie (bo np. nie ma drogi z wierzchołka C do wierzchołka E).

Pojęcia ostatnich rozdziałów dla grafów skierowanych

Definicja cyklu Hamiltona dla grafów skierowanych musi uwzględniać kierunki krawędzi (i rozstrzyganie o istnieniu tego cyklu jest równie trudne jak dla grafów nieskierowanych).
Dwudzielność, skojarzenia, liczba i indeks chromatyczny dla grafów skierowanych są zdefiniowane tak samo jak dla ich grafów podstawowych.
Algorytmy przeszukiwania działają na grafach skierowanych podobnie jak dla nieskierowanych. Za chwilę pokażemy zastosowanie przeszukiwania w głąb do szczególnego ponumerowania wierzchołków grafu.

Źródło i ujście

Źródło i ujście

Wierzchołek grafu skierowanego nazywamy źródłem, jeśli nie jest końcem żadnej krawędzi (nie prowadzi do niego żadna strzałka). Wierzchołek grafu skierowanego nazywamy ujściem, jeśli nie jest początkiem żadnej krawędzi (nie wychodzi z niego żadna strzałka).

Źródło i ujście

W przyszłości, przy badaniu sieci zdarzeń, przyda nam się pewne twierdzenie i dwa algorytmy.

Źródło i ujście w grafie acyklicznym

Każdy skończony acykliczny graf skierowany ma co najmniej jedno źródło i jedno ujście.

Algorytm znajdowania źródła

Pomocniczo skonstruujemy algorytm znajdowania źródła w grafie acyklicznym (podobnie znajdziemy ujście).

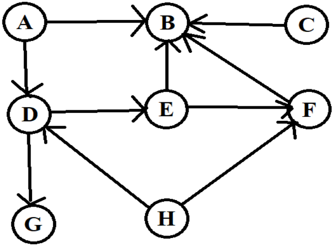
Algorytm ŹRÓDŁO

Dane: Skończony acykliczny graf skierowany G
Zmienne: $SOURCE(G)$ - wierzchołek.

- I. Wybierz dowolny wierzchołek $v \in V(G)$. $SOURCE(G) := v$.
- II. Dopóki $\{u \in V(G) : (u, SOURCE(G)) \in E(G)\} \neq \emptyset$ wykonuj:
- II.1 Wybierz dowolne $w \in \{u \in V(G) : (u, v) \in E(G)\}$; $SOURCE(G) := w$,
- Po zatrzymaniu algorytmu SOURCE(G) jest źródłem (niekoniecznie jedynym).

Złożoność obliczeniowa: $O(|V(G)|)$.

Źródła i ujścia



W powyższym grafie A,C i H są źródłami, a B i G - ujściami. Algorytm ŹRÓDŁO rozpoczęty w wierzchołku E, znajdzie najpierw wierzchołek D, a w drugim obiegu pętli zakończy się albo w wierzchołku A, albo w wierzchołku H, znajdując *jakieś* źródło.

Etykietowanie uporządkowane

Algorytm ŹRÓDŁO pomoże nam znaleźć etykietowanie uporządkowane dla grafów acyklicznych.

Etykietowanie uporządkowane

Etykietowaniem uporządkowanym nazywamy takie ponumerowanie wierzchołków grafu skierowanego liczbami od 1 do $n = |V(G)|$, że jeśli istnieje droga z wierzchołka i do wierzchołka j to $i < j$.

Czasami etykietowanie uporządkowane definiuje się na odwrót ($i > j$ jeśli istnieje droga z i do j). W naszej wersji, numer 1 będzie mieć jakieś źródło grafu, numer n - jakieś ujście i generalnie, przemieszczając się wzdłuż krawędzi grafu skierowanego, trafiamy na coraz wyższe numery etykietowania uporządkowanego. Etykietowanie uporządkowane nie zawsze istnieje, a jeśli istnieje to zazwyczaj jest więcej niż jedno.

Etykietowanie uporządkowane

Oczywiście, jeśli graf skierowany miały cykl, nie dałoby się go poetykietować w sposób uporządkowany. Istniałaby wtedy droga z pewnego wierzchołka v z powrotem do samego siebie (cykl), co by oznaczało, że etykieta v jest silnie większa niż etykieta v (sprzeczność). Natomiast:

Istnienie etykietowania uporządkowanego

Każdy skończony acykliczny graf skierowany ma etykietowanie uporządkowane.

Co więcej, istnieje prosty algorytm (o złożoności $O(n^2)$) realizujący to etykietowanie, który za chwilę przedstawimy.

Algorytm numerowania wierzchołków

Algorytm NUMEROWANIE

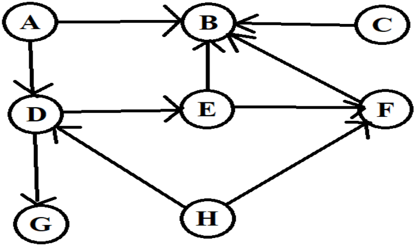
Dane: Skończony acykliczny graf skierowany $G = (V(G), E(G))$ o n wierzchołkach

Zmienne: V - zbiór wierzchołków, E - zbiór krawędzi.

- I. $V := V(G)$, $E := E(G)$.
- II. Dopóki $V \neq \emptyset$ wykonuj:
- II.1 Dla grafu $H = (V, E)$ wykonujemy ŹRÓDŁO(H).
- II.2 Wierzchołkowi ŹRÓDŁO(H) nadajemy numer $n - |V| + 1$.
- II.3 ŹRÓDŁO(H) usuwamy z V, a krawędzie wychodzące z ŹRÓDŁO(H) usuwamy z E.

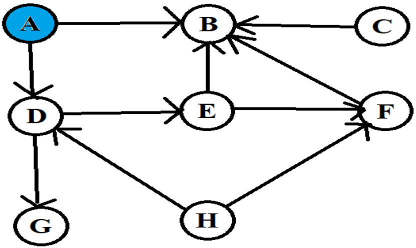
Złożoność obliczeniowa: $O(n^2)$.

Algorytm NUMEROWANIE - przykład



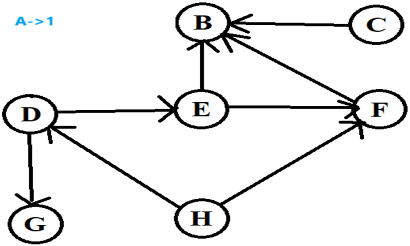
Spróbujemy zastosować algorytm numerowania zgodnego z etykietowaniem uporządkowanym dla powyższego grafu, który oznaczamy **G**. W tym grafie $n = 8$ i $|V| = 8$. W pierwszym kroku algorytmu **G**=**H** (pogrubienie by odróżnić graf od wierzchołka), więc zaczynamy od wykonania na nim algorytmu ŹRÓDŁO. Ponieważ nie mamy żadnych wskazówek co do jego wykonywania rozpoczniemy od wykonywanie ŹRÓDŁA od wierzchołka A (alfabetycznie).

Algorytm NUMEROWANIE - przykład



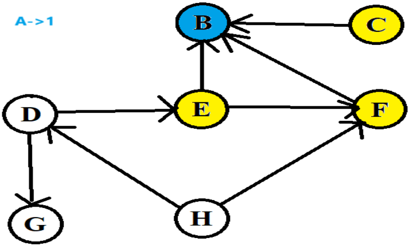
Szukamy „poprzedników” A, czyli wierzchołków z których krawędzie prowadzą do A. Nie ma takich wierzchołków, więc algorytm ŹRÓDŁO się w tym miejscu kończy z wynikiem ŹRÓDŁO(**H**)=A. Zatem przypisujemy wierzchołkowi A etykietę $n - |V| + 1 = 8 - 8 + 1 = 1$ i usuwamy z grafu **H** wierzchołek A oraz krawędzie z niego prowadzące: (A,B) i (A,D).

Algorytm NUMEROWANIE - przykład



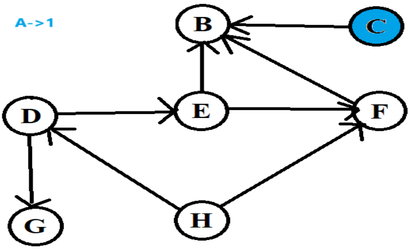
Dla nowego grafu **H** (powyżej), $|V| = 7$, znów wykonujemy algorytm ŹRÓDŁO. Ponieważ nie mamy żadnych wskazówek co do jego wykonywania rozpoczniemy od wykonywanie ŹRÓDŁA od wierzchołka B (alfabetycznie).

Algorytm NUMEROWANIE - przykład



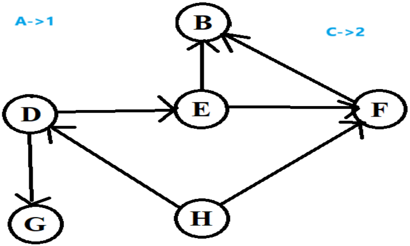
Szukamy „poprzedników” B, czyli wierzchołków z których krawędzie prowadzą do B. Są trzy takie wierzchołki (C,E i F). Zatem nie kończymy algorytmu lecz przechodzimy do jednego z tych wierzchołków (alfabetycznie: C) i dla niego wykonujemy kolejny krok algorytmu ŹRÓDŁO.

Algorytm NUMEROWANIE - przykład



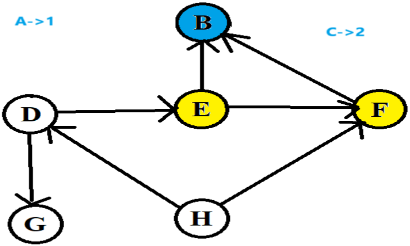
Szukamy „poprzedników" C, czyli wierzchołków z których krawędzie prowadzą do C. Nie ma takich wierzchołków, więc algorytm ŹRÓDŁO się w tym miejscu kończy z wynikiem ŹRÓDŁO(**H**)=C. Zatem przypisujemy wierzchołkowi C etykietę $n - |V| + 1 = 8 - 7 + 1 = 2$ i usuwamy z grafu **H** wierzchołek C oraz krawędź z niego prowadzącą: (C,B).

Algorytm NUMEROWANIE - przykład



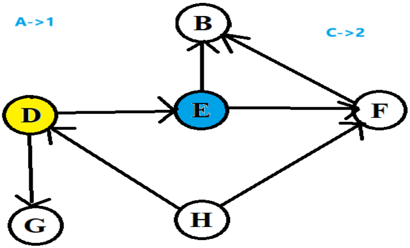
Dla nowego grafu **H** (powyżej), $|V| = 6$, znów wykonujemy algorytm ŹRÓDŁO. Ponieważ nie mamy żadnych wskazówek co do jego wykonywania rozpoczniemy od wykonywanie ŹRÓDŁA od wierzchołka B (alfabetycznie).

Algorytm NUMEROWANIE - przykład



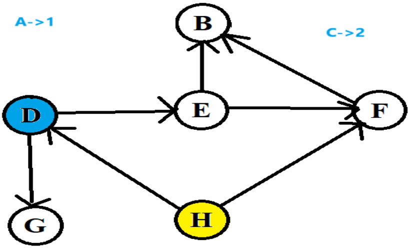
Szukamy „poprzedników” B, czyli wierzchołków z których krawędzie prowadzą do B. Są dwa takie wierzchołki (E i F). Zatem nie kończymy algorytmu lecz przechodzimy do jednego z tych wierzchołków (alfabetycznie: E) i dla niego wykonujemy kolejny krok algorytmu ŹRÓDŁO.

Algorytm NUMEROWANIE - przykład



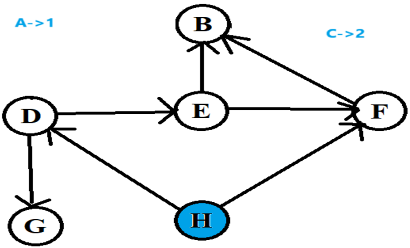
Szukamy „poprzedników" E, czyli wierzchołków z których krawędzie prowadzą do E. Jest jeden taki wierzchołek (D). Zatem nie kończymy algorytmu lecz przechodzimy do wierzchołka D i dla niego wykonujemy kolejny krok algorytmu ŹRÓDŁO.

Algorytm NUMEROWANIE - przykład



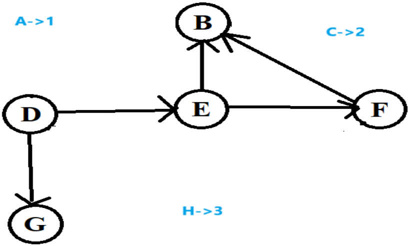
Szukamy „poprzedników” D, czyli wierzchołków z których krawędzie prowadzą do D. Jest jeden taki wierzchołek (H). Zatem nie kończymy algorytmu lecz przechodzimy do wierzchołka H i dla niego wykonujemy kolejny krok algorytmu ŹRÓDŁO.

Algorytm NUMEROWANIE - przykład



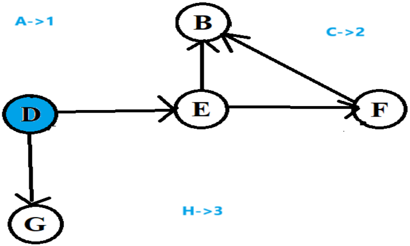
Szukamy „poprzedników" H, czyli wierzchołków z których krawędzie prowadzą do H. Nie ma takich wierzchołków, więc algorytm ŹRÓDŁO się w tym miejscu kończy z wynikiem ŹRÓDŁO(**H**)=H. Zatem przypisujemy wierzchołkowi H etykietę $n - |V| + 1 = 8 - 6 + 1 = 3$ i usuwamy z grafu **H** wierzchołek H oraz krawędzie z niego prowadzące: (H,D) i (H,F).

Algorytm NUMEROWANIE - przykład



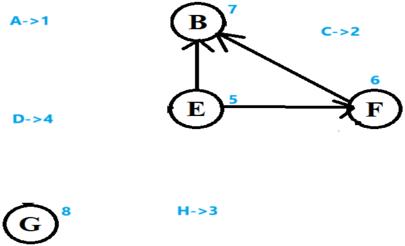
Dla nowego grafu **H** (powyżej), $|V| = 5$, znów wykonujemy algorytm ŹRÓDŁO. Ponieważ nie mamy żadnych wskazówek co do jego wykonywania rozpoczniemy od wykonywanie ŹRÓDŁA od wierzchołka B (alfabetycznie).

Algorytm NUMEROWANIE - przykład



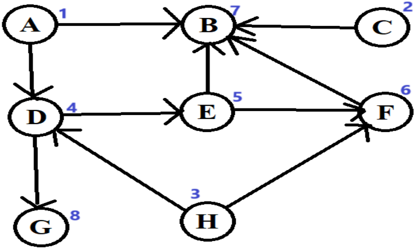
Powtarzając tę samą procedurę otrzymujemy ŹRÓDŁO(**H**)=D. Zatem przypisujemy wierzchołkowi D etykietę $n - |V| + 1 = 8 - 5 + 1 = 4$ i usuwamy z grafu **H** wierzchołek D oraz krawędź: (D,E).

Algorytm NUMEROWANIE - przykład



W ten sam sposób kolejne etykiety otrzymają E-5, F-6, B-7 i G-8.

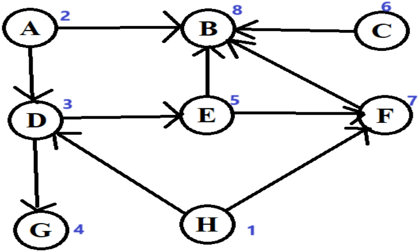
Algorytm NUMEROWANIE - przykład



Ostatecznie wynikiem algorytmu jest poniższa tabelka etykiet:

wierzchołek	A	B	C	D	E	F	G	H
etykieta	1	7	2	4	5	6	8	3

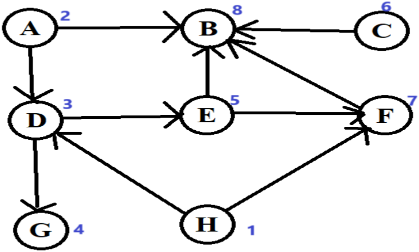
Algorytm NUMEROWANIE - przykład



Oczywiście, nie jest to jedyne numerowanie bądące etykietowaniem uporządkowanym. Inaczej wybierając wierzchołki podczas wykonywania algorytmu możemy uzyskać inne, na przykład

wierzchołek	A	B	C	D	E	F	G	H
etykieta	2	8	6	3	5	7	4	1

Algorytm NUMEROWANIE - przykład



Zauważmy, że w jakkolwiek każde etykietowanie uporządkowane przypisze najniższy numer (1) jakiemuś źródłu, a najwyższy (tutaj 8) jakiemuś ujściu, nie oznacza to (jak w przykładzie powyżej), że najniższe numery należą do źródeł, a najwyższe do ujść. W powyższym przykładzie etykietowania uporządkowanego jedno z ujść (G) ma nawet niższy numer niż jedno ze źródeł (C). Jest to możliwe, gdyż nie łączy ich żadna droga.