3. Rekurencje

Grzegorz Kosiorowski

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

Definicje rekurencyjne - intuicja

Mówimy, że zbiór pewnych obiektów jest zdefiniowany rekurencyjnie, jeśli pewne elementy zostały umieszczone w tym zbiorze na początku, a inne się tam znajdują w wyniku pewnego „przepisu” na tworzenie kolejnych elementów zbioru za pomocą poprzednich.

Definicje rekurencyjne - intuicja

Mówimy, że zbiór pewnych obiektów jest zdefiniowany rekurencyjnie, jeśli pewne elementy zostały umieszczone w tym zbiorze na początku, a inne się tam znajdują w wyniku pewnego „przepisu" na tworzenie kolejnych elementów zbioru za pomocą poprzednich.
Kluczowe w definicji rekurencyjnej jest to, że zazwyczaj nie jesteśmy w stanie szybko określić własności elementu dołączonego do zbioru, poza kilkoma pierwszymi. Własności te (albo same elementy) oblicza się na bieżąco: konieczna jest do tego znajomość elementów poprzednich.

Definicje rekurencyjne - intuicja

Mówimy, że zbiór pewnych obiektów jest zdefiniowany rekurencyjnie, jeśli pewne elementy zostały umieszczone w tym zbiorze na początku, a inne się tam znajdują w wyniku pewnego „przepisu” na tworzenie kolejnych elementów zbioru za pomocą poprzednich.
Kluczowe w definicji rekurencyjnej jest to, że zazwyczaj nie jesteśmy w stanie szybko określić własności elementu dołączonego do zbioru, poza kilkoma pierwszymi. Własności te (albo same elementy) oblicza się na bieżąco: konieczna jest do tego znajomość elementów poprzednich.
Przykładem może być definicja silni:

Definicje rekurencyjne - intuicja

Mówimy, że zbiór pewnych obiektów jest zdefiniowany rekurencyjnie, jeśli pewne elementy zostały umieszczone w tym zbiorze na początku, a inne się tam znajdują w wyniku pewnego „przepisu" na tworzenie kolejnych elementów zbioru za pomocą poprzednich.
Kluczowe w definicji rekurencyjnej jest to, że zazwyczaj nie jesteśmy w stanie szybko określić własności elementu dołączonego do zbioru, poza kilkoma pierwszymi. Własności te (albo same elementy) oblicza się na bieżąco: konieczna jest do tego znajomość elementów poprzednich.
Przykładem może być definicja silni: najpierw definiuje się $0! = 1$ i $1! = 1$,

Definicje rekurencyjne - intuicja

Mówimy, że zbiór pewnych obiektów jest zdefiniowany rekurencyjnie, jeśli pewne elementy zostały umieszczone w tym zbiorze na początku, a inne się tam znajdują w wyniku pewnego „przepisu” na tworzenie kolejnych elementów zbioru za pomocą poprzednich.
Kluczowe w definicji rekurencyjnej jest to, że zazwyczaj nie jesteśmy w stanie szybko określić własności elementu dołączonego do zbioru, poza kilkoma pierwszymi. Własności te (albo same elementy) oblicza się na bieżąco: konieczna jest do tego znajomość elementów poprzednich.
Przykładem może być definicja silni: najpierw definiuje się $0! = 1$ i $1! = 1$, a następnie dla dowolnego n mamy $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$.

Definicje rekurencyjne - intuicja

Mówimy, że zbiór pewnych obiektów jest zdefiniowany rekurencyjnie, jeśli pewne elementy zostały umieszczone w tym zbiorze na początku, a inne się tam znajdują w wyniku pewnego „przepisu" na tworzenie kolejnych elementów zbioru za pomocą poprzednich.
Kluczowe w definicji rekurencyjnej jest to, że zazwyczaj nie jesteśmy w stanie szybko określić własności elementu dołączonego do zbioru, poza kilkoma pierwszymi. Własności te (albo same elementy) oblicza się na bieżąco: konieczna jest do tego znajomość elementów poprzednich.
Przykładem może być definicja silni: najpierw definiuje się $0! = 1$ i $1! = 1$, a następnie dla dowolnego n mamy $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$. W ten sposób uzyskujemy iloczyn wszystkich liczb naturalnych dodatnich nie większych od danej.

Definicja rekurencyjna

Definicja rekurencyjna

Definicja rekurencyjna zbioru S składa się z dwóch części:
1) Warunku początkowego postaci $X \subset S$ (w wypadku ciągu, zdefiniowanie pierwszych wyrazów)
2) Warunku rekurencyjnego: jeśli element s powstaje z elementów zbioru S w wyniku zastosowania pewnych reguł, to $s \in S$.
Element $s \in S$ wtedy i tylko wtedy gdy warunki 1 i 2 to wymuszają.

Definicja rekurencyjna - przykład

Naturalnym matematycznym przykładem definicji rekurencyjnej jest przywołana wcześniej definicja silni.

Definicja rekurencyjna - przykład

Naturalnym matematycznym przykładem definicji rekurencyjnej jest przywołana wcześniej definicja silni. Faktycznie składa się z warunku początkowego, czyli określenia wartości tej funkcji na zbiorze $\{0, 1\}$, oraz warunku rekurencyjnego, definiującego wartość silni dla $n + 1$ na podstawie jej wartości dla n.

Definicja rekurencyjna - przykład 2

Innym znanym matematycznym przykładem definiowania rekurencyjnego jest tzw. ciąg Fibonacciego.

Definicja rekurencyjna - przykład 2

Innym znanym matematycznym przykładem definiowania rekurencyjnego jest tzw. ciąg Fibonacciego. Zwrócił na niego uwagę Leonardo z Pizy (od XIX wieku nazywany Fibonaccim) w swojej książce *Liber abaci* z 1202 roku.

Definicja rekurencyjna - przykład 2

Innym znanym matematycznym przykładem definiowania rekurencyjnego jest tzw. ciąg Fibonacciego. Zwrócił na niego uwagę Leonardo z Pizy (od XIX wieku nazywany Fibonaccim) w swojej książce *Liber abaci* z 1202 roku. Oryginalnie powstał jako zadanie o rozmnażaniu królików:

Definicja rekurencyjna - przykład 2

Innym znanym matematycznym przykładem definiowania rekurencyjnego jest tzw. ciąg Fibonacciego. Zwrócił na niego uwagę Leonardo z Pizy (od XIX wieku nazywany Fibonaccim) w swojej książce *Liber abaci* z 1202 roku. Oryginalnie powstał jako zadanie o rozmnażaniu królików:

Zadanie Leonarda z Pizy

Załóżmy, że każda para królików zaczyna się rozmnażać po jednostce czasu od urodzenia. W trakcie tej jednostki czasu dorosła para królików ma jedną parę młodych. Zakładając, że króliki nie umierają (ani nie znikają w żaden inny sposób) i że na początku mieliśmy w hodowli jedną parę młodych królików, ile par królików będzie w hodowli w dowolnym momencie?

Definicja rekurencyjna - ciąg Fibonacciego

Wiemy, że pierwsze wyrazy tego ciągu to: $F_0 = 1$ i $F_1 = 1$ (bo para dopiero dorosła) - to warunek początkowy ciągu.

Definicja rekurencyjna - ciąg Fibonacciego

Wiemy, że pierwsze wyrazy tego ciągu to: $F_0 = 1$ i $F_1 = 1$ (bo para dopiero dorosła) - to warunek początkowy ciągu. Następnie $F_2 = 2$ (jedna para dorosła i jedna młoda),

Definicja rekurencyjna - ciąg Fibonacciego

Wiemy, że pierwsze wyrazy tego ciągu to: $F_0 = 1$ i $F_1 = 1$ (bo para dopiero dorosła) - to warunek początkowy ciągu. Następnie $F_2 = 2$ (jedna para dorosła i jedna młoda), $F_3 = 3$ (dwie pary dorosłe, jedna młoda),

Definicja rekurencyjna - ciąg Fibonacciego

Wiemy, że pierwsze wyrazy tego ciągu to: $F_0 = 1$ i $F_1 = 1$ (bo para dopiero dorosła) - to warunek początkowy ciągu. Następnie $F_2 = 2$ (jedna para dorosła i jedna młoda), $F_3 = 3$ (dwie pary dorosłe, jedna młoda), $F_4 = 5$ (trzy pary dorosłe, dwie młode),

Definicja rekurencyjna - ciąg Fibonacciego

Wiemy, że pierwsze wyrazy tego ciągu to: $F_0 = 1$ i $F_1 = 1$ (bo para dopiero dorosła) - to warunek początkowy ciągu. Następnie $F_2 = 2$ (jedna para dorosła i jedna młoda), $F_3 = 3$ (dwie pary dorosłe, jedna młoda), $F_4 = 5$ (trzy pary dorosłe, dwie młode), $F_5 = 8$ (3 pary młode i 5 dorosłych),

Definicja rekurencyjna - ciąg Fibonacciego

Wiemy, że pierwsze wyrazy tego ciągu to: $F_0 = 1$ i $F_1 = 1$ (bo para dopiero dorosła) - to warunek początkowy ciągu. Następnie $F_2 = 2$ (jedna para dorosła i jedna młoda), $F_3 = 3$ (dwie pary dorosłe, jedna młoda), $F_4 = 5$ (trzy pary dorosłe, dwie młode), $F_5 = 8$ (3 pary młode i 5 dorosłych), $F_6 = 13$ (8 par dorosłych i 5 młodych)itd.

Definicja rekurencyjna - ciąg Fibonacciego

Wiemy, że pierwsze wyrazy tego ciągu to: $F_0 = 1$ i $F_1 = 1$ (bo para dopiero dorosła) - to warunek początkowy ciągu. Następnie $F_2 = 2$ (jedna para dorosła i jedna młoda), $F_3 = 3$ (dwie pary dorosłe, jedna młoda), $F_4 = 5$ (trzy pary dorosłe, dwie młode), $F_5 = 8$ (3 pary młode i 5 dorosłych), $F_6 = 13$ (8 par dorosłych i 5 młodych)itd. Łatwo zauważyć schemat: $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.

Definicja rekurencyjna - ciąg Fibonacciego

Wiemy, że pierwsze wyrazy tego ciągu to: $F_0 = 1$ i $F_1 = 1$ (bo para dopiero dorosła) - to warunek początkowy ciągu. Następnie $F_2 = 2$ (jedna para dorosła i jedna młoda), $F_3 = 3$ (dwie pary dorosłe, jedna młoda), $F_4 = 5$ (trzy pary dorosłe, dwie młode), $F_5 = 8$ (3 pary młode i 5 dorosłych), $F_6 = 13$ (8 par dorosłych i 5 młodych)itd. Łatwo zauważyć schemat: $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. Jest to warunek rekurencyjny ciągu Fibonacciego - w istocie, nie jest łatwo zgadnąć, ile będzie wynosił np. 50-ty wyraz tego ciągu.

Definicja rekurencyjna - ciąg Fibonacciego

Wiemy, że pierwsze wyrazy tego ciągu to: $F_0 = 1$ i $F_1 = 1$ (bo para dopiero dorosła) - to warunek początkowy ciągu. Następnie $F_2 = 2$ (jedna para dorosła i jedna młoda), $F_3 = 3$ (dwie pary dorosłe, jedna młoda), $F_4 = 5$ (trzy pary dorosłe, dwie młode), $F_5 = 8$ (3 pary młode i 5 dorosłych), $F_6 = 13$ (8 par dorosłych i 5 młodych)itd. Łatwo zauważyć schemat: $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. Jest to warunek rekurencyjny ciągu Fibonacciego - w istocie, nie jest łatwo zgadnąć, ile będzie wynosił np. 50-ty wyraz tego ciągu. Jak zobaczymy wkrótce, wzór ogólny na n-ty wyraz ciągu jest mocno zaskakujący.

Dygresja - liczby Fibonacciego

Kolejne elementy ciągu Fibonacciego $(1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots)$ nazywa się liczbami Fibonacciego.

Dygresja - liczby Fibonacciego

Kolejne elementy ciągu Fibonacciego $(1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots)$ nazywa się liczbami Fibonacciego. Mają one liczne zastosowania, nie tylko matematyczne (choć oczywiście nie w badaniu rozwoju populacji).

- Ekonomia: model wzrostu Brocka-Mirmana;

Dygresja - liczby Fibonacciego

Kolejne elementy ciągu Fibonacciego $(1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots)$ nazywa się liczbami Fibonacciego. Mają one liczne zastosowania, nie tylko matematyczne (choć oczywiście nie w badaniu rozwoju populacji).

- Ekonomia: model wzrostu Brocka-Mirmana;
- Analiza techniczna (*Fibonacci retracements*);

Dygresja - liczby Fibonacciego

Kolejne elementy ciągu Fibonacciego $(1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots)$ nazywa się liczbami Fibonacciego. Mają one liczne zastosowania, nie tylko matematyczne (choć oczywiście nie w badaniu rozwoju populacji).

- Ekonomia: model wzrostu Brocka-Mirmana;
- Analiza techniczna (*Fibonacci retracements*);
- Generatory liczb pseudolosowych;

Dygresja - liczby Fibonacciego

Kolejne elementy ciągu Fibonacciego $(1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots)$ nazywa się liczbami Fibonacciego. Mają one liczne zastosowania, nie tylko matematyczne (choć oczywiście nie w badaniu rozwoju populacji).

- Ekonomia: model wzrostu Brocka-Mirmana;
- Analiza techniczna (*Fibonacci retracements*);
- Generatory liczb pseudolosowych;
- Dobrze brzmiące proporcje w utworach muzycznych (np. Beli Bartoka);

Dygresja - liczby Fibonacciego

Kolejne elementy ciągu Fibonacciego $(1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots)$ nazywa się liczbami Fibonacciego. Mają one liczne zastosowania, nie tylko matematyczne (choć oczywiście nie w badaniu rozwoju populacji).

- Ekonomia: model wzrostu Brocka-Mirmana;
- Analiza techniczna (*Fibonacci retracements*);
- Generatory liczb pseudolosowych;
- Dobrze brzmiące proporcje w utworach muzycznych (np. Beli Bartoka);
- Rozwiązania zagadek literackich (D.Brown, P.K.Dick, J. Zajdel, M.Huberath).

Dygresja - liczby Fibonacciego

Najbardziej znana własność natury związana z liczbami Fibonacciego to konstrukcja spiral w wielu roślinach (np. ananas, szyszki, słonecznik, astry, czy kapusta).

Dygresja - liczby Fibonacciego

Najbardziej znana własność natury związana z liczbami Fibonacciego to konstrukcja spiral w wielu roślinach (np. ananas, szyszki, słonecznik, astry, czy kapusta). Często się zdarza, że rozmaite proporcje, takie jak stosunek liczby spiral prawoskrętnych do lewoskrętnych, stosunek przerw pomiędzy kolejnymi kwiatami/owocami/innymi strukturami powstaje z liczb Fibonacciego (np. $5/13$, $8/21$).

Dygresja - liczby Fibonacciego

Najbardziej znana własność natury związana z liczbami Fibonacciego to konstrukcja spiral w wielu roślinach (np. ananas, szyszki, słonecznik, astry, czy kapusta). Często się zdarza, że rozmaite proporcje, takie jak stosunek liczby spiral prawoskrętnych do lewoskrętnych, stosunek przerw pomiędzy kolejnymi kwiatami/owocami/innymi strukturami powstaje z liczb Fibonacciego (np. 5/13, 8/21). Nie jest to przypadek, ani żadna numerologia - wynika to z natury procesów fizykochemicznych zachodzących w tych roślinach (zdjęcia na następnym slajdzie - z Wikipedii).

Liczby Fibonacciego w naturze

Proporcje zgrubień na spirali odpowiadają liczbom Fibonacciego.

Liczby Fibonacciego w naturze

Proporcje zgrubień na spirali odpowiadają liczbom Fibonacciego.

Kwiat rumianu żółtego (rodzaj astra) składa się z 21 spiral prawo- i 13 lewo-skrętnych.

Definicja rekurencyjna - imiona u Kikuyu

Przykładem definicji rekurencyjnej jest sposób nadawania imion praktykowany do niedawna przez członków kenijskiego ludu Kikuyu.

Definicja rekurencyjna - imiona u Kikuyu

Przykładem definicji rekurencyjnej jest sposób nadawania imion praktykowany do niedawna przez członków kenijskiego ludu Kikuyu. Wyjaśnię ten mechanizm na przykładzie nadawania imion córkom: (dla synów jest analogiczny).

Definicja rekurencyjna - imiona u Kikuyu

Przykładem definicji rekurencyjnej jest sposób nadawania imion praktykowany do niedawna przez członków kenijskiego ludu Kikuyu. Wyjaśnię ten mechanizm na przykładzie nadawania imion córkom: (dla synów jest analogiczny). Pierwsza córka otrzymywała imię babki ze strony matki, druga - babki ze strony ojca.

Definicja rekurencyjna - imiona u Kikuyu

Przykładem definicji rekurencyjnej jest sposób nadawania imion praktykowany do niedawna przez członków kenijskiego ludu Kikuyu. Wyjaśnię ten mechanizm na przykładzie nadawania imion córkom: (dla synów jest analogiczny). Pierwsza córka otrzymywała imię babki ze strony matki, druga - babki ze strony ojca. Trzecia - najstarszej siostry babki ze strony matki, czwarta - najstarszej siostry babki ze strony ojca,

Definicja rekurencyjna - imiona u Kikuyu

Przykładem definicji rekurencyjnej jest sposób nadawania imion praktykowany do niedawna przez członków kenijskiego ludu Kikuyu. Wyjaśnię ten mechanizm na przykładzie nadawania imion córkom: (dla synów jest analogiczny). Pierwsza córka otrzymywała imię babki ze strony matki, druga - babki ze strony ojca. Trzecia - najstarszej siostry babki ze strony matki, czwarta - najstarszej siostry babki ze strony ojca, piąta dostawała imię drugiej co do starszeństwa siostry babki ze strony matki i tak dalej...

Definicja rekurencyjna - imiona u Kikuyu

Przykładem definicji rekurencyjnej jest sposób nadawania imion praktykowany do niedawna przez członków kenijskiego ludu Kikuyu. Wyjaśnię ten mechanizm na przykładzie nadawania imion córkom: (dla synów jest analogiczny). Pierwsza córka otrzymywała imię babki ze strony matki, druga - babki ze strony ojca. Trzecia - najstarszej siostry babki ze strony matki, czwarta - najstarszej siostry babki ze strony ojca, piąta dostawała imię drugiej co do starszeństwa siostry babki ze strony matki i tak dalej...

Definicja rekurencyjna - imiona u Kikuyu

Wydaje się, że ten algorytm ma lukę: na przykład jeśli w jakiejś rodzinie jest 6 córek, a babka ze strony ojca miała tylko jedną siostrę, to nie ma po kim nadać imienia szóstej córce.

Definicja rekurencyjna - imiona u Kikuyu

Wydaje się, że ten algorytm ma lukę: na przykład jeśli w jakiejś rodzinie jest 6 córek, a babka ze strony ojca miała tylko jedną siostrę, to nie ma po kim nadać imienia szóstej córce. Jednak Kikuyu to nie przeszkadzało: co prawda druga siostra babki nie istnieje, ale to nic nie szkodzi, bo...

Definicja rekurencyjna - imiona u Kikuyu

Wydaje się, że ten algorytm ma lukę: na przykład jeśli w jakiejś rodzinie jest 6 córek, a babka ze strony ojca miała tylko jedną siostrę, to nie ma po kim nadać imienia szóstej córce. Jednak Kikuyu to nie przeszkadzało: co prawda druga siostra babki nie istnieje, ale to nic nie szkodzi, bo...wiemy, JAK MIAŁABY NA IMIĘ GDYBY ISTNIAŁA.

Definicja rekurencyjna - imiona u Kikuyu

Wydaje się, że ten algorytm ma lukę: na przykład jeśli w jakiejś rodzinie jest 6 córek, a babka ze strony ojca miała tylko jedną siostrę, to nie ma po kim nadać imienia szóstej córce. Jednak Kikuyu to nie przeszkadzało: co prawda druga siostra babki nie istnieje, ale to nic nie szkodzi, bo...wiemy, JAK MIAŁABY NA IMIĘ GDYBY ISTNIAŁA. Po prostu wystarczy sięgnąć do imion przodków 4 pokolenia wstecz, by córka mogła dostać imię po nieistniejącej siostrze babki.

Definicja rekurencyjna - imiona u Kikuyu

Wydaje się, że ten algorytm ma lukę: na przykład jeśli w jakiejś rodzinie jest 6 córek, a babka ze strony ojca miała tylko jedną siostrę, to nie ma po kim nadać imienia szóstej córce. Jednak Kikuyu to nie przeszkadzało: co prawda druga siostra babki nie istnieje, ale to nic nie szkodzi, bo...wiemy, JAK MIAŁABY NA IMIĘ GDYBY ISTNIAŁA. Po prostu wystarczy sięgnąć do imion przodków 4 pokolenia wstecz, by córka mogła dostać imię po nieistniejącej siostrze babki.

Algorytm ten zatem zawsze działa i jest ewidentnie rekurencyjny - imiona pierwszych kilku pokoleń przodków plemienia generują imiona wszystkich potomków, ale nawet znając zarys całego drzewa genealogicznego nie jesteśmy w stanie powiedzieć jak na imię będzie mieć wskazany pra-pra-. . .-pra-potomek bez prześledzenia imion wszystkich „potomków pośrednich”.

Definicja rekurencyjna - potencjalne błędy

Jak widać, w pewnych sytuacjach posłużenie się definicją rekurencyjną jest łatwiejsze niż bezpośrednim wzorem. Jednak takie definicje, nieostrożnie używane, mogą powodować pewne problemy.

Definicja rekurencyjna - potencjalne błędy

Jak widać, w pewnych sytuacjach posłużenie się definicją rekurencyjną jest łatwiejsze niż bezpośrednim wzorem. Jednak takie definicje, nieostrożnie używane, mogą powodować pewne problemy. Najbardziej typowy błąd w wywołaniu definicji rekurencyjnej to odwołanie się w konstrukcji następnych elementów, do elementów jeszcze nieskonstruowanych.

Definicja rekurencyjna - potencjalne błędy

Jak widać, w pewnych sytuacjach posłużenie się definicją rekurencyjną jest łatwiejsze niż bezpośrednim wzorem. Jednak takie definicje, nieostrożnie używane, mogą powodować pewne problemy. Najbardziej typowy błąd w wywołaniu definicji rekurencyjnej to odwołanie się w konstrukcji następnych elementów, do elementów jeszcze nieskonstruowanych. Na przykład gdyby do definicji rekurencyjnej ciągu Fibonacciego $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ dołożyć tylko warunek początkowy o jednym wyrazie (np. $F_1 = 1$, bez warunku na F_0), to nie potrafilibyśmy obliczyć elementu F_2.

Definicja rekurencyjna - potencjalne błędy

Jak widać, w pewnych sytuacjach posłużenie się definicją rekurencyjną jest łatwiejsze niż bezpośrednim wzorem. Jednak takie definicje, nieostrożnie używane, mogą powodować pewne problemy. Najbardziej typowy błąd w wywołaniu definicji rekurencyjnej to odwołanie się w konstrukcji następnych elementów, do elementów jeszcze nieskonstruowanych. Na przykład gdyby do definicji rekurencyjnej ciągu Fibonacciego $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ dołożyć tylko warunek początkowy o jednym wyrazie (np. $F_1 = 1$, bez warunku na F_0), to nie potrafilibyśmy obliczyć elementu F_2.
Innym przykładem może być definicja ciągu warunkiem rekurencyjnym: $a_n = \frac{1}{2}a_{2n}$. Żeby obliczyć wartość np. a_5, musimy znać wartość a_{10}, czyli też a_{20} itd. Niezależnie, ile byśmy dodali warunków początkowych (o ile byłoby ich skończenie wiele), nie wyznaczymy wartości ciągu dla każdego n.

Definicja rekurencyjna - potencjalne błędy

Jak widać, w pewnych sytuacjach posłużenie się definicją rekurencyjną jest łatwiejsze niż bezpośrednim wzorem. Jednak takie definicje, nieostrożnie używane, mogą powodować pewne problemy. Najbardziej typowy błąd w wywołaniu definicji rekurencyjnej to odwołanie się w konstrukcji następnych elementów, do elementów jeszcze nieskonstruowanych. Na przykład gdyby do definicji rekurencyjnej ciągu Fibonacciego $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ dołożyć tylko warunek początkowy o jednym wyrazie (np. $F_1 = 1$, bez warunku na F_0), to nie potrafilibyśmy obliczyć elementu F_2.
Innym przykładem może być definicja ciągu warunkiem rekurencyjnym: $a_n = \frac{1}{2}a_{2n}$. Żeby obliczyć wartość np. a_5, musimy znać wartość a_{10}, czyli też a_{20} itd. Niezależnie, ile byśmy dodali warunków początkowych (o ile byłoby ich skończenie wiele), nie wyznaczymy wartości ciągu dla każdego n.

Definicja rekurencyjna - potencjalne błędy

Błąd z poprzedniego slajdu najlepiej zawiera w sobie zdanie: „Aby zrozumieć rekurencję, trzeba zrozumieć rekurencję" (choć to raczej algorytm rekurencyjny niż definicja).

Definicja rekurencyjna - potencjalne błędy

Błąd z poprzedniego slajdu najlepiej zawiera w sobie zdanie: „Aby zrozumieć rekurencję, trzeba zrozumieć rekurencję" (choć to raczej algorytm rekurencyjny niż definicja).
Podsumowując - pierwszy typ błędu to definicja „zbyt słaba", która nie definiuje nam niektórych elementów naszego zbioru.

Definicja rekurencyjna - potencjalne błędy

Błędem może też być definicja „zbyt silna” - zadająca niektóre elementy zbioru na kilka, niekoniecznie tożsamych sposobów:

Definicja rekurencyjna - potencjalne błędy

Błędem może też być definicja „zbyt silna" - zadająca niektóre elementy zbioru na kilka, niekoniecznie tożsamych sposobów:
Przykład: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$; pozostałe wyrazy ciągu a_n spełniają zależność: $a_{k+m} = (a_k)^2 + (a_m)^2$.

Definicja rekurencyjna - potencjalne błędy

Błędem może też być definicja „zbyt silna" - zadająca niektóre elementy zbioru na kilka, niekoniecznie tożsamych sposobów:
Przykład: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$; pozostałe wyrazy ciągu a_n spełniają zależność: $a_{k+m} = (a_k)^2 + (a_m)^2$.
Na początku to działa dobrze:
$a_3 = a_{1+2} = (a_k)^2 + (a_m)^2 = 1 + 4 = 5$.

Definicja rekurencyjna - potencjalne błędy

Błędem może też być definicja „zbyt silna" - zadająca niektóre elementy zbioru na kilka, niekoniecznie tożsamych sposobów:
Przykład: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$; pozostałe wyrazy ciągu a_n spełniają zależność: $a_{k+m} = (a_k)^2 + (a_m)^2$.
Na początku to działa dobrze:
$a_3 = a_{1+2} = (a_k)^2 + (a_m)^2 = 1 + 4 = 5$. Niestety, dla a_4 ten sposób określania ciągu się psuje:

Definicja rekurencyjna - potencjalne błędy

Błędem może też być definicja „zbyt silna" - zadająca niektóre elementy zbioru na kilka, niekoniecznie tożsamych sposobów:
Przykład: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$; pozostałe wyrazy ciągu a_n spełniają zależność: $a_{k+m} = (a_k)^2 + (a_m)^2$.
Na początku to działa dobrze:
$a_3 = a_{1+2} = (a_k)^2 + (a_m)^2 = 1 + 4 = 5$. Niestety, dla a_4 ten sposób określania ciągu się psuje:$a_4 = a_{3+1} = (a_3)^2 + (a_1)^2 = 25 + 1 = 26$.

Definicja rekurencyjna - potencjalne błędy

Błędem może też być definicja „zbyt silna" - zadająca niektóre elementy zbioru na kilka, niekoniecznie tożsamych sposobów:
Przykład: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$; pozostałe wyrazy ciągu a_n spełniają zależność: $a_{k+m} = (a_k)^2 + (a_m)^2$.
Na początku to działa dobrze:
$a_3 = a_{1+2} = (a_k)^2 + (a_m)^2 = 1 + 4 = 5$. Niestety, dla a_4 ten sposób określania ciągu się psuje:$a_4 = a_{3+1} = (a_3)^2 + (a_1)^2 = 25 + 1 = 26$.
Niby dobrze, ale sprawdźmy inaczej ...

Definicja rekurencyjna - potencjalne błędy

Błędem może też być definicja „zbyt silna” - zadająca niektóre elementy zbioru na kilka, niekoniecznie tożsamych sposobów:
Przykład: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$; pozostałe wyrazy ciągu a_n spełniają zależność: $a_{k+m} = (a_k)^2 + (a_m)^2$.
Na początku to działa dobrze:
$a_3 = a_{1+2} = (a_k)^2 + (a_m)^2 = 1 + 4 = 5$. Niestety, dla a_4 ten sposób określania ciągu się psuje:$a_4 = a_{3+1} = (a_3)^2 + (a_1)^2 = 25 + 1 = 26$.
Niby dobrze, ale sprawdźmy inaczej ...
$a_4 = a_{2+2} = (a_2)^2 + (a_2)^2 = 4 + 4 = 8$.

Definicja rekurencyjna - potencjalne błędy

Błędem może też być definicja „zbyt silna" - zadająca niektóre elementy zbioru na kilka, niekoniecznie tożsamych sposobów:
Przykład: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$; pozostałe wyrazy ciągu a_n spełniają zależność: $a_{k+m} = (a_k)^2 + (a_m)^2$.
Na początku to działa dobrze:
$a_3 = a_{1+2} = (a_k)^2 + (a_m)^2 = 1 + 4 = 5$. Niestety, dla a_4 ten sposób określania ciągu się psuje:$a_4 = a_{3+1} = (a_3)^2 + (a_1)^2 = 25 + 1 = 26$.
Niby dobrze, ale sprawdźmy inaczej ...
$a_4 = a_{2+2} = (a_2)^2 + (a_2)^2 = 4 + 4 = 8$.
Tak więc, ta definicja nie jest dobra, bo nie wiadomo, który sposób obliczania a_4 jest dobry - a a_4 byłoby potrzebne do obliczania kolejnych wyrazów ciągu.

Definicja rekurencyjna - unikanie błędów

Dlatego zawsze należy dowodzić, że definicje rekurencyjne są poprawne. Najlepiej, by definicja była jednoznaczna tj. nowe elementy zbioru S otrzymujemy tylko w jeden sposób.

Definicja rekurencyjna - unikanie błędów

Dlatego zawsze należy dowodzić, że definicje rekurencyjne są poprawne. Najlepiej, by definicja była jednoznaczna tj. nowe elementy zbioru S otrzymujemy tylko w jeden sposób.
Z definicjami rekurencyjnymi wiąże się jeszcze jeden problem. Taka definicja może być absolutnie poprawna, ale może się okazać, że tak naprawdę nie wiemy, co ona definiuje!

Przykład - zagadnienie $3n + 1$

Zbiór $S \subset \mathbb{N}_+$ definiujemy następująco: $1 \in S$ (warunek początkowy) oraz dla liczb naturalnych dodatnich
$n \in S \iff (\frac{n}{2} \in S \vee 3n + 1 \in S)$ (warunek rekurencyjny).

Przykład - zagadnienie $3n+1$

Zbiór $S \subset \mathbb{N}_+$ definiujemy następująco: $1 \in S$ (warunek początkowy) oraz dla liczb naturalnych dodatnich
$n \in S \iff \left(\frac{n}{2} \in S \vee 3n+1 \in S\right)$ (warunek rekurencyjny).
Przykładowo $2 \in S$, bo $\frac{2}{2} \in S$.

Przykład - zagadnienie $3n+1$

Zbiór $S \subset \mathbb{N}_+$ definiujemy następująco: $1 \in S$ (warunek początkowy) oraz dla liczb naturalnych dodatnich
$n \in S \iff (\frac{n}{2} \in S \vee 3n+1 \in S)$ (warunek rekurencyjny).
Przykładowo $2 \in S$, bo $\frac{2}{2} \in S$. Analogicznie, wszystkie potęgi dwójki należą do S. 5 należy do S, bo $3 \cdot 5 + 1 = 16 = 2^4 \in S$.

Przykład - zagadnienie $3n + 1$

Zbiór $S \subset \mathbb{N}_+$ definiujemy następująco: $1 \in S$ (warunek początkowy) oraz dla liczb naturalnych dodatnich
$n \in S \iff (\frac{n}{2} \in S \vee 3n + 1 \in S)$ (warunek rekurencyjny).
Przykładowo $2 \in S$, bo $\frac{2}{2} \in S$. Analogicznie, wszystkie potęgi dwójki należą do S. 5 należy do S, bo $3 \cdot 5 + 1 = 16 = 2^4 \in S$. Skoro tak, to $10 \in S$.

Przykład - zagadnienie $3n + 1$

Zbiór $S \subset \mathbb{N}_+$ definiujemy następująco: $1 \in S$ (warunek początkowy) oraz dla liczb naturalnych dodatnich
$n \in S \iff (\frac{n}{2} \in S \vee 3n + 1 \in S)$ (warunek rekurencyjny).
Przykładowo $2 \in S$, bo $\frac{2}{2} \in S$. Analogicznie, wszystkie potęgi dwójki należą do S. 5 należy do S, bo $3 \cdot 5 + 1 = 16 = 2^4 \in S$. Skoro tak, to $10 \in S$. A $10 = 3 \cdot 3 + 1$, czyli $3 \in S$.

Przykład - zagadnienie $3n + 1$

Zbiór $S \subset \mathbb{N}_+$ definiujemy następująco: $1 \in S$ (warunek początkowy) oraz dla liczb naturalnych dodatnich
$n \in S \iff (\frac{n}{2} \in S \vee 3n + 1 \in S)$ (warunek rekurencyjny).
Przykładowo $2 \in S$, bo $\frac{2}{2} \in S$. Analogicznie, wszystkie potęgi dwójki należą do S. 5 należy do S, bo $3 \cdot 5 + 1 = 16 = 2^4 \in S$. Skoro tak, to $10 \in S$. A $10 = 3 \cdot 3 + 1$, czyli $3 \in S$.

Hipoteza Collatza (zagadnienie $3n + 1$)

$S = \mathbb{N}_+$.

Przykład - zagadnienie $3n + 1$

Zbiór $S \subset \mathbb{N}_+$ definiujemy następująco: $1 \in S$ (warunek początkowy) oraz dla liczb naturalnych dodatnich
$n \in S \iff (\frac{n}{2} \in S \vee 3n + 1 \in S)$ (warunek rekurencyjny).
Przykładowo $2 \in S$, bo $\frac{2}{2} \in S$. Analogicznie, wszystkie potęgi dwójki należą do S. 5 należy do S, bo $3 \cdot 5 + 1 = 16 = 2^4 \in S$. Skoro tak, to $10 \in S$. A $10 = 3 \cdot 3 + 1$, czyli $3 \in S$.

Hipoteza Collatza (zagadnienie $3n + 1$)

$S = \mathbb{N}_+$.

Ta hipoteza jest znana jako „najprostszy nierozwiązany problem matematyczny” (z całkiem sporą nagrodą za rozwiązanie). Jak na razie wiadomo, że do S należą wszystkie liczby naturalne aż do $5 \cdot 10^{18}$, ale znane są hipotezy w teorii liczb, które mają znacznie większe kontrprzykłady.

Przykład - zagadnienie $3n + 1$

Zbiór $S \subset \mathbb{N}_+$ definiujemy następująco: $1 \in S$ (warunek początkowy) oraz dla liczb naturalnych dodatnich
$n \in S \iff (\frac{n}{2} \in S \vee 3n + 1 \in S)$ (warunek rekurencyjny).
Przykładowo $2 \in S$, bo $\frac{2}{2} \in S$. Analogicznie, wszystkie potęgi dwójki należą do S. 5 należy do S, bo $3 \cdot 5 + 1 = 16 = 2^4 \in S$. Skoro tak, to $10 \in S$. A $10 = 3 \cdot 3 + 1$, czyli $3 \in S$.

Hipoteza Collatza (zagadnienie $3n + 1$)

$S = \mathbb{N}_+$.

Ta hipoteza jest znana jako „najprostszy nierozwiązany problem matematyczny" (z całkiem sporą nagrodą za rozwiązanie). Jak na razie wiadomo, że do S należą wszystkie liczby naturalne aż do $5 \cdot 10^{18}$, ale znane są hipotezy w teorii liczb, które mają znacznie większe kontrprzykłady.

Algorytm rekurencyjny

Algorytm rekurencyjny

Algorytm rekurencyjny to algorytm, który w trakcie wykonywania wywołuje sam siebie.

Algorytm rekurencyjny

Algorytm rekurencyjny to algorytm, który w trakcie wykonywania wywołuje sam siebie.

Przykładami takich algorytmów mogą być proste procedury wywołujące wcześniejsze definicje:

Algorytm rekurencyjny

Algorytm rekurencyjny

Algorytm rekurencyjny to algorytm, który w trakcie wykonywania wywołuje sam siebie.

Przykładami takich algorytmów mogą być proste procedury wywołujące wcześniejsze definicje:

- Obliczanie 50! - trzeba wcześniej obliczyć 49!, 48! itd., czyli wywołać program obliczający silnię wielokrotnie. Podobnie z obliczaniem F_{50}.

Algorytm rekurencyjny

Algorytm rekurencyjny

Algorytm rekurencyjny to algorytm, który w trakcie wykonywania wywołuje sam siebie.

Przykładami takich algorytmów mogą być proste procedury wywołujące wcześniejsze definicje:

- Obliczanie 50! - trzeba wcześniej obliczyć 49!, 48! itd., czyli wywołać program obliczający silnię wielokrotnie. Podobnie z obliczaniem F_{50}.
- Wyznaczenie imienia trzeciej córki rodziców Kikuyu, której babcie były jedynaczkami (kolejność wywoływania algorytmu wyznaczania imion „dwa pokolenia wyżej").

Algorytm rekurencyjny

Algorytm rekurencyjny

Algorytm rekurencyjny to algorytm, który w trakcie wykonywania wywołuje sam siebie.

- Dobrym skojarzeniem z algorytmem rekurencyjnym jest otwieranie lalek „matrioszek" (jedna w drugiej...) - by otworzyć ostatnią, trzeba wywołać ten sam algorytm do otworzenia przedostatniej itd.

Algorytm rekurencyjny

Algorytm rekurencyjny

Algorytm rekurencyjny to algorytm, który w trakcie wykonywania wywołuje sam siebie.

- Dobrym skojarzeniem z algorytmem rekurencyjnym jest otwieranie lalek „matrioszek" (jedna w drugiej...) - by otworzyć ostatnią, trzeba wywołać ten sam algorytm do otworzenia przedostatniej itd.
- Algorytm poszukiwań danego obiektu („igły w stogu siana") typu dziel i rządź: gdy potrafimy wyznaczyć, że taki obiekt jest w danej grupie obiektów, czy nie (np. wykrywacz metalu): dzielimy obiekt na dwie części i sprawdzamy, w której jest. Dla tej części, algorytm wywołuje sam siebie, aż część będzie tak mała, że bezpośrednio da się znaleźć obiekt.

Rozwiązywanie liniowych zależności rekurencyjnych

Jak widzieliśmy, często mamy do czynienia z sytuacją, gdy dosyć łatwo jest uzyskać wzór rekurencyjny ciągu, ale nie wzór ogólny na konkretny jego wyraz (ciąg Fibonacciego, silnia itp.).

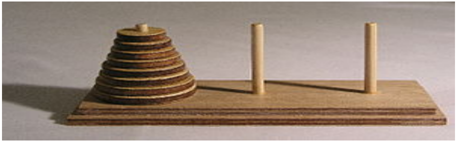
Rozwiązywanie liniowych zależności rekurencyjnych

Jak widzieliśmy, często mamy do czynienia z sytuacją, gdy dosyć łatwo jest uzyskać wzór rekurencyjny ciągu, ale nie wzór ogólny na konkretny jego wyraz (ciąg Fibonacciego, silnia itp.). Wzór rekurencyjny bywa pożyteczny, ale ma kilka wad: jak widzieliśmy, trzeba uważać, czy jego definicja jest poprawna, widząc wzór pierwszy raz często nie wiemy, co on właściwie definiuje i dodatkowo zazwyczaj obliczanie dalekich wyrazów ciągu trwa dłużej niż gdy wzór jest podany w *postaci zwartej*, czyli bez odwoływania się do poprzednich wyrazów tego ciągu.

Rozwiązywanie liniowych zależności rekurencyjnych

Jak widzieliśmy, często mamy do czynienia z sytuacją, gdy dosyć łatwo jest uzyskać wzór rekurencyjny ciągu, ale nie wzór ogólny na konkretny jego wyraz (ciąg Fibonacciego, silnia itp.). Wzór rekurencyjny bywa pożyteczny, ale ma kilka wad: jak widzieliśmy, trzeba uważać, czy jego definicja jest poprawna, widząc wzór pierwszy raz często nie wiemy, co on właściwie definiuje i dodatkowo zazwyczaj obliczanie dalekich wyrazów ciągu trwa dłużej niż gdy wzór jest podany w *postaci zwartej*, czyli bez odwoływania się do poprzednich wyrazów tego ciągu.
Dlatego rozwiązaniem zależności rekurencyjnej zadającej jakiś ciąg będziemy nazywać zwarty wzór na n-ty wyraz danego ciągu.

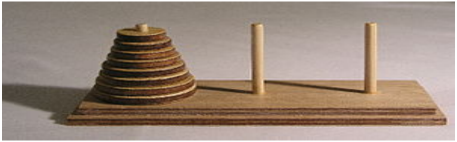
Przykład - wieże z Hanoi



Zagadka wież z Hanoi

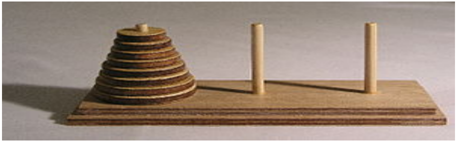
Legenda mówi, że w bramińskiej świątyni w Hanoi mnisi przekładają 64 złote krążki o różnej średnicy pomiędzy trzema diamentowymi słupkami. Na początku wszystkie krążki były nanizane na jeden słupek, tak, że najmniejszy krążek leżał na górze, a pod nim pozostałe, w kolejności rosnącej średnicy (największy na samym dole). Krążki przekładane są pojedynczo. Krążka nigdy nie można było przełożyć na inny słupek w ten sposób, by leżał na mniejszym krążku. Ile co najmniej przełożeń potrzeba, by wszystkie krążki przenieść z pierwszego słupka na ostatni? (zdjęcie z Wikipedii)

Przykład - wieże z Hanoi



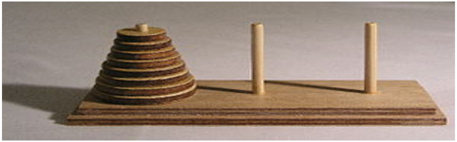
Żeby rozwiązać tę zagadkę, najpierw ją uogólnimy: załóżmy, że do dyspozycji mamy *n* krążków.

Przykład - wieże z Hanoi



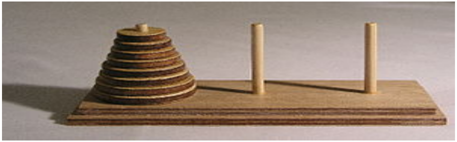
Żeby rozwiązać tę zagadkę, najpierw ją uogólnimy: załóżmy, że do dyspozycji mamy n krążków. Przez T_n oznaczymy odpowiedź na pytanie: Ile co najmniej przełożeń potrzeba, by n krążków przenieść z pierwszego słupka na ostatni?

Przykład - wieże z Hanoi



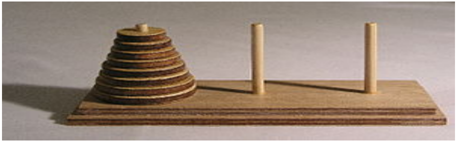
Żeby rozwiązać tę zagadkę, najpierw ją uogólnimy: załóżmy, że do dyspozycji mamy n krążków. Przez T_n oznaczymy odpowiedź na pytanie: Ile co najmniej przełożeń potrzeba, by n krążków przenieść z pierwszego słupka na ostatni?
Najpierw zaobserwujmy pojedyncze przypadki: $T_0 = 0$ (nie potrzebujemy się ruszać, by przenieść zero krążków),

Przykład - wieże z Hanoi



Żeby rozwiązać tę zagadkę, najpierw ją uogólnimy: załóżmy, że do dyspozycji mamy n krążków. Przez T_n oznaczymy odpowiedź na pytanie: Ile co najmniej przełożeń potrzeba, by n krążków przenieść z pierwszego słupka na ostatni?
Najpierw zaobserwujmy pojedyncze przypadki: $T_0 = 0$ (nie potrzebujemy się ruszać, by przenieść zero krążków), $T_1 = 1$ (jeden krążek w jednym ruchu),

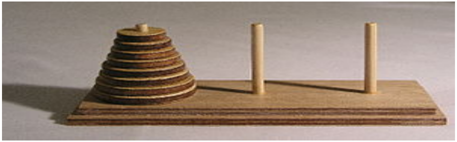
Przykład - wieże z Hanoi



Żeby rozwiązać tę zagadkę, najpierw ją uogólnimy: załóżmy, że do dyspozycji mamy n krążków. Przez T_n oznaczymy odpowiedź na pytanie: Ile co najmniej przełożeń potrzeba, by n krążków przenieść z pierwszego słupka na ostatni?

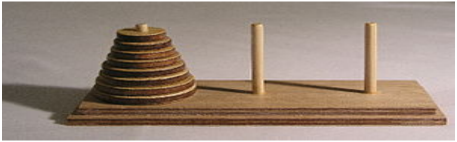
Najpierw zaobserwujmy pojedyncze przypadki: $T_0 = 0$ (nie potrzebujemy się ruszać, by przenieść zero krążków), $T_1 = 1$ (jeden krążek w jednym ruchu), $T_2 = 3$ (najpierw mniejszy krążek na drugi słupek, większy na trzeci, mniejszy na większy).

Wieże z Hanoi - definicja rekurencyjna



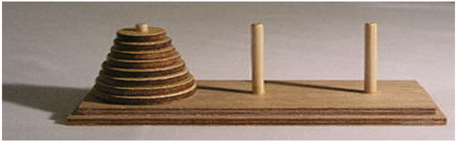
Dość łatwo wyznaczyć wzór rekurencyjny na T_n:

Wieże z Hanoi - definicja rekurencyjna



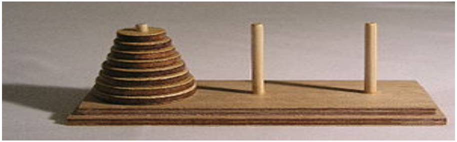
Dość łatwo wyznaczyć wzór rekurencyjny na T_n:
Żeby przełożyć na słupek trzeci największy z krążków, najpierw musimy pozostałe $n-1$ krążków przełożyć na słupek drugi (wykorzystując słupek 3). W ilu przełożeniach można tego dokonać?

Wieże z Hanoi - definicja rekurencyjna



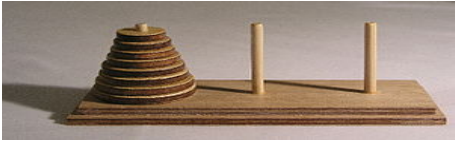
Dość łatwo wyznaczyć wzór rekurencyjny na T_n:
Żeby przełożyć na słupek trzeci największy z krążków, najpierw musimy pozostałe $n-1$ krążków przełożyć na słupek drugi (wykorzystując słupek 3). W ilu przełożeniach można tego dokonać? Oczywiście, w T_{n-1}!

Wieże z Hanoi - definicja rekurencyjna



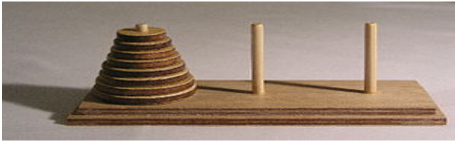
Dość łatwo wyznaczyć wzór rekurencyjny na T_n:
Żeby przełożyć na słupek trzeci największy z krążków, najpierw musimy pozostałe $n-1$ krążków przełożyć na słupek drugi (wykorzystując słupek 3). W ilu przełożeniach można tego dokonać? Oczywiście, w T_{n-1}! Następnie musimy przełożyć największy krążek z pierwszego słupka na trzeci (1 przełożenie),

Wieże z Hanoi - definicja rekurencyjna



Dość łatwo wyznaczyć wzór rekurencyjny na T_n:
Żeby przełożyć na słupek trzeci największy z krążków, najpierw musimy pozostałe $n-1$ krążków przełożyć na słupek drugi (wykorzystując słupek 3). W ilu przełożeniach można tego dokonać? Oczywiście, w T_{n-1}! Następnie musimy przełożyć największy krążek z pierwszego słupka na trzeci (1 przełożenie), a potem wszystkie $n-1$ krążków przełożyć ze słupka drugiego na trzeci (wykorzystując słupek 1) - co znowu zajmie T_{n-1} ruchów.

Wieże z Hanoi - definicja rekurencyjna



Dość łatwo wyznaczyć wzór rekurencyjny na T_n:
Żeby przełożyć na słupek trzeci największy z krążków, najpierw musimy pozostałe $n-1$ krążków przełożyć na słupek drugi (wykorzystując słupek 3). W ilu przełożeniach można tego dokonać? Oczywiście, w T_{n-1}! Następnie musimy przełożyć największy krążek z pierwszego słupka na trzeci (1 przełożenie), a potem wszystkie $n-1$ krążków przełożyć ze słupka drugiego na trzeci (wykorzystując słupek 1) - co znowu zajmie T_{n-1} ruchów.
Podsumowując, mamy $T_n = T_{n-1} + 1 + T_{n-1} = 2T_{n-1} + 1$ i $T_0 = 0$ - czyli pełną definicję rekurencyjną T_n.

Wieże z Hanoi - wzór zwarty

$T_n = 2T_{n-1} + 1$ i $T_0 = 0$ - ta definicja niezbyt ułatwia nam rozwiązanie oryginalnej zagadki. Obliczenie T_{64} może trwać dość długo. Dlatego potrzebujemy wzoru zwartego.

Wieże z Hanoi - wzór zwarty

$T_n = 2T_{n-1} + 1$ i $T_0 = 0$ - ta definicja niezbyt ułatwia nam rozwiązanie oryginalnej zagadki. Obliczenie T_{64} może trwać dość długo. Dlatego potrzebujemy wzoru zwartego.
Posłużymy się sztuczką: przyjrzymy się ciągowi $U_n := T_n + 1$.

Wieże z Hanoi - wzór zwarty

$T_n = 2T_{n-1} + 1$ i $T_0 = 0$ - ta definicja niezbyt ułatwia nam rozwiązanie oryginalnej zagadki. Obliczenie T_{64} może trwać dość długo. Dlatego potrzebujemy wzoru zwartego.
Posłużymy się sztuczką: przyjrzymy się ciągowi $U_n := T_n + 1$. Ten ciąg spełnia zależność $U_0 = 1$ i

Wieże z Hanoi - wzór zwarty

$T_n = 2T_{n-1} + 1$ i $T_0 = 0$ - ta definicja niezbyt ułatwia nam rozwiązanie oryginalnej zagadki. Obliczenie T_{64} może trwać dość długo. Dlatego potrzebujemy wzoru zwartego.
Posłużymy się sztuczką: przyjrzymy się ciągowi $U_n := T_n + 1$. Ten ciąg spełnia zależność $U_0 = 1$ i $U_n - 1 = 2(U_{n-1} - 1) + 1$,

Wieże z Hanoi - wzór zwarty

$T_n = 2T_{n-1} + 1$ i $T_0 = 0$ - ta definicja niezbyt ułatwia nam rozwiązanie oryginalnej zagadki. Obliczenie T_{64} może trwać dość długo. Dlatego potrzebujemy wzoru zwartego.
Posłużymy się sztuczką: przyjrzymy się ciągowi $U_n := T_n + 1$. Ten ciąg spełnia zależność $U_0 = 1$ i $U_n - 1 = 2(U_{n-1} - 1) + 1$, czyli $U_n = 2U_{n-1}$.

Wieże z Hanoi - wzór zwarty

$T_n = 2T_{n-1} + 1$ i $T_0 = 0$ - ta definicja niezbyt ułatwia nam rozwiązanie oryginalnej zagadki. Obliczenie T_{64} może trwać dość długo. Dlatego potrzebujemy wzoru zwartego.
Posłużymy się sztuczką: przyjrzymy się ciągowi $U_n := T_n + 1$. Ten ciąg spełnia zależność $U_0 = 1$ i $U_n - 1 = 2(U_{n-1} - 1) + 1$, czyli $U_n = 2U_{n-1}$. Wzór zwarty ciągu U_n wyznaczyć teraz łatwo: $U_n = 2^n$.

Wieże z Hanoi - wzór zwarty

$T_n = 2T_{n-1} + 1$ i $T_0 = 0$ - ta definicja niezbyt ułatwia nam rozwiązanie oryginalnej zagadki. Obliczenie T_{64} może trwać dość długo. Dlatego potrzebujemy wzoru zwartego.
Posłużymy się sztuczką: przyjrzymy się ciągowi $U_n := T_n + 1$. Ten ciąg spełnia zależność $U_0 = 1$ i $U_n - 1 = 2(U_{n-1} - 1) + 1$, czyli $U_n = 2U_{n-1}$. Wzór zwarty ciągu U_n wyznaczyć teraz łatwo: $U_n = 2^n$.
Stąd otrzymujemy wzór $T_n = U_n - 1 = 2^n - 1$.

Wieże z Hanoi - wzór zwarty

$T_n = 2T_{n-1} + 1$ i $T_0 = 0$ - ta definicja niezbyt ułatwia nam rozwiązanie oryginalnej zagadki. Obliczenie T_{64} może trwać dość długo. Dlatego potrzebujemy wzoru zwartego.
Posłużymy się sztuczką: przyjrzymy się ciągowi $U_n := T_n + 1$. Ten ciąg spełnia zależność $U_0 = 1$ i $U_n - 1 = 2(U_{n-1} - 1) + 1$, czyli $U_n = 2U_{n-1}$. Wzór zwarty ciągu U_n wyznaczyć teraz łatwo: $U_n = 2^n$.
Stąd otrzymujemy wzór $T_n = U_n - 1 = 2^n - 1$.
Zatem, odpowiedzią na zagadkę jest $2^{64} - 1$, czyli ponad 18 trylionów przełożeń.

Wieże z Hanoi - wzór zwarty

$T_n = 2T_{n-1} + 1$ i $T_0 = 0$ - ta definicja niezbyt ułatwia nam rozwiązanie oryginalnej zagadki. Obliczenie T_{64} może trwać dość długo. Dlatego potrzebujemy wzoru zwartego.
Posłużymy się sztuczką: przyjrzymy się ciągowi $U_n := T_n + 1$. Ten ciąg spełnia zależność $U_0 = 1$ i $U_n - 1 = 2(U_{n-1} - 1) + 1$, czyli $U_n = 2U_{n-1}$. Wzór zwarty ciągu U_n wyznaczyć teraz łatwo: $U_n = 2^n$.
Stąd otrzymujemy wzór $T_n = U_n - 1 = 2^n - 1$.
Zatem, odpowiedzią na zagadkę jest $2^{64} - 1$, czyli ponad 18 trylionów przełożeń. Przy założeniu, że mnisi przekładają jeden krążek na sekundę, ułożenie tej łamigłówki zajmie im około 580 miliardów lat.

Ogólne podejście - motywacja

Poradziliśmy sobie ze zmianą postaci rekurencyjnej na zwartą w zagadnieniu wież Hanoi.

Ogólne podejście - motywacja

Poradziliśmy sobie ze zmianą postaci rekurencyjnej na zwartą w zagadnieniu wież Hanoi. Jednakże, metoda tam przedstawiona nie jest uniwersalna - działa dla tego konkretnego ciągu.

Ogólne podejście - motywacja

Poradziliśmy sobie ze zmianą postaci rekurencyjnej na zwartą w zagadnieniu wież Hanoi. Jednakże, metoda tam przedstawiona nie jest uniwersalna - działa dla tego konkretnego ciągu. Dlatego przydałyby się jakieś bardziej ogólne metody.

Ogólne podejście - motywacja

Poradziliśmy sobie ze zmianą postaci rekurencyjnej na zwartą w zagadnieniu wież Hanoi. Jednakże, metoda tam przedstawiona nie jest uniwersalna - działa dla tego konkretnego ciągu. Dlatego przydałyby się jakieś bardziej ogólne metody.
Jest wiele ogólnych metod, często dość wyrafinowanych, przechodzenia z postaci rekurencyjnej do zwartej. Jako przykład, przedstawimy jedną, dla ciągów s_n określonych wzorami rekurencyjnymi typu $s_n = as_{n-1} + bs_{n-2} + f(n)$ (jak np. ciąg Fibonacciego), przy założeniu, że znamy s_1 i s_0.

Rekurencje liniowe jednorodne - przypadki „patologiczne"

Dla danych $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$ mamy definicję rekurencyjną *jednorodną* $s_n = as_{n-1} + bs_{n-2}$ $(a, b \in \mathbb{R})$. Przez *jednorodność* w tej sytuacji rozumiemy, że prawa strona warunku rekurencyjnego zawiera tylko wyrazy zależne od poprzednich elementów ciągu, nie od numeru obliczanego wyrazu $(f(n))$.

Rekurencje liniowe jednorodne - przypadki „patologiczne"

Dla danych $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$ mamy definicję rekurencyjną *jednorodną* $s_n = as_{n-1} + bs_{n-2}$ $(a, b \in \mathbb{R})$. Przez *jednorodność* w tej sytuacji rozumiemy, że prawa strona warunku rekurencyjnego zawiera tylko wyrazy zależne od poprzednich elementów ciągu, nie od numeru obliczanego wyrazu $(f(n))$. Najpierw rozważymy przypadki szczególne:

Rekurencje liniowe jednorodne - przypadki „patologiczne”

Dla danych $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$ mamy definicję rekurencyjną *jednorodną* $s_n = as_{n-1} + bs_{n-2}$ $(a, b \in \mathbb{R})$. Przez *jednorodność* w tej sytuacji rozumiemy, że prawa strona warunku rekurencyjnego zawiera tylko wyrazy zależne od poprzednich elementów ciągu, nie od numeru obliczanego wyrazu $(f(n))$. Najpierw rozważymy przypadki szczególne:
Po pierwsze, łatwo zauważyć, że jeśli $b = 0$, czyli $s_n = as_{n-1}$ to $s_n = a^n s_0$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

Rekurencje liniowe jednorodne - przypadki „patologiczne”

Dla danych $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$ mamy definicję rekurencyjną *jednorodną* $s_n = as_{n-1} + bs_{n-2}$ $(a, b \in \mathbb{R})$. Przez *jednorodność* w tej sytuacji rozumiemy, że prawa strona warunku rekurencyjnego zawiera tylko wyrazy zależne od poprzednich elementów ciągu, nie od numeru obliczanego wyrazu $(f(n))$. Najpierw rozważymy przypadki szczególne:

Po pierwsze, łatwo zauważyć, że jeśli $b = 0$, czyli $s_n = as_{n-1}$ to $s_n = a^n s_0$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

Jeśli $a = 0$ (czyli $s_n = bs_{n-2}$) to łatwo jest udowodnić, że $s_{2n} = b^n s_0$ i $s_{2n+1} = b^n s_1$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

Rekurencje liniowe jednorodne - przypadki „patologiczne”

Dla danych $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$ mamy definicję rekurencyjną *jednorodną* $s_n = as_{n-1} + bs_{n-2}$ $(a, b \in \mathbb{R})$. Przez *jednorodność* w tej sytuacji rozumiemy, że prawa strona warunku rekurencyjnego zawiera tylko wyrazy zależne od poprzednich elementów ciągu, nie od numeru obliczanego wyrazu $(f(n))$. Najpierw rozważymy przypadki szczególne:

Po pierwsze, łatwo zauważyć, że jeśli $b = 0$, czyli $s_n = as_{n-1}$ to $s_n = a^n s_0$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

Jeśli $a = 0$ (czyli $s_n = bs_{n-2}$) to łatwo jest udowodnić, że $s_{2n} = b^n s_0$ i $s_{2n+1} = b^n s_1$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

Zatem odtąd będziemy zakładać, że $a \neq 0, b \neq 0$.

Rekurencje liniowe jednorodne

Równanie charakterystyczne

Dla zależności rekurencyjnej $s_n = as_{n-1} + bs_{n-2}$ *równaniem charakterystycznym* nazywamy:

$$x^2 - ax - b = 0.$$

Rekurencje liniowe jednorodne

Rozwiązanie rekurencji liniowej jednorodnej

Dla danych $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$ i definicji rekurencyjnej $s_n = as_{n-1} + bs_{n-2}$ $(a, b \in \mathbb{R})$, jeśli równanie charakterystyczne $x^2 - ax - b = 0$ ma dwa różne pierwiastki r_1 i r_2, to rozwiązaniem rekurencji jest:

$$s_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n,$$

dla pewnych stałych c_1 i c_2.
Jeśli równanie charakterystyczne ma jeden pierwiastek podwójny r to rozwiązaniem rekurencji jest:

$$s_n = c_1 r^n + c_2 n r^n,$$

dla pewnych stałych c_1 i c_2.

Twierdzenie o rozwiązywaniu liniowych jednorodnych - uwagi

Twierdzenie o rozwiązywaniu liniowych jednorodnych - uwagi

- Występujące w twierdzeniu postaci rozwiązań rekurencji jednorodnych nazywamy *rozwiązaniami ogólnymi* (nie uwzględniają one danych s_0 i s_1).

Twierdzenie o rozwiązywaniu liniowych jednorodnych - uwagi

- Występujące w twierdzeniu postaci rozwiązań rekurencji jednorodnych nazywamy *rozwiązaniami ogólnymi* (nie uwzględniają one danych s_0 i s_1).
- Stałe c_1 i c_2 obliczamy podstawiając do otrzymanego wzoru s_0 i s_1 (jeśli są dane), otrzymując tzw. *rozwiązanie szczególne* (uwzględniające warunki początkowe) - czyli ostateczne rozwiązanie problemu.

Przykład - ciąg Fibonacciego

Zadanie

Rozwiązać rekurencję $F_0 = 1$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

Przykład - ciąg Fibonacciego

Zadanie

Rozwiązać rekurencję $F_0 = 1$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

Najpierw wypisujemy równanie charakterystyczne tej rekurencji:

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Przykład - ciąg Fibonacciego

Zadanie

Rozwiązać rekurencję $F_0 = 1$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

Najpierw wypisujemy równanie charakterystyczne tej rekurencji:

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Rozwiązując je, dostajemy dwa pierwiastki $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Przykład - ciąg Fibonacciego

Zadanie

Rozwiązać rekurencję $F_0 = 1$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

Najpierw wypisujemy równanie charakterystyczne tej rekurencji:

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Rozwiązując je, dostajemy dwa pierwiastki $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Zatem, zgodnie z twierdzeniem, rozwiązanie ogólne jest postaci:

$$F_n = c_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + c_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n.$$

Przykład - ciąg Fibonacciego

Zadanie

Rozwiązać rekurencję $F_0 = 1$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

Najpierw wypisujemy równanie charakterystyczne tej rekurencji:

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Rozwiązując je, dostajemy dwa pierwiastki $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Zatem, zgodnie z twierdzeniem, rozwiązanie ogólne jest postaci:

$$F_n = c_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + c_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n.$$

Musimy teraz obliczyć c_1 i c_2.

Przykład - ciąg Fibonacciego

Zadanie

Rozwiązać rekurencję $F_0 = 1$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

$$F_n = c_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + c_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n.$$

Przykład - ciąg Fibonacciego

Zadanie

Rozwiązać rekurencję $F_0 = 1$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

$$F_n = c_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + c_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n.$$

Podstawiamy za n najpierw 0, a potem 1 i korzystając z warunków zadania oraz rozwiązania ogólnego dostajemy:

$$\begin{cases} 1 = F_0 = c_1 + c_2 \\ 1 = F_1 = c_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) + c_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2}) \end{cases} \quad \Rightarrow$$

Przykład - ciąg Fibonacciego

Zadanie

Rozwiązać rekurencję $F_0 = 1$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

$$F_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Podstawiamy za n najpierw 0, a potem 1 i korzystając z warunków zadania oraz rozwiązania ogólnego dostajemy:

$$\begin{cases} 1 = F_0 = c_1 + c_2 \\ 1 = F_1 = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \\ c_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \end{cases}.$$

Przykład - ciąg Fibonacciego

Zadanie

Rozwiązać rekurencję $F_0 = 1,\ F_1 = 1,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

$$F_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Podstawiamy za n najpierw 0, a potem 1 i korzystając z warunków zadania oraz rozwiązania ogólnego dostajemy:

$$\begin{cases} 1 = F_0 = c_1 + c_2 \\ 1 = F_1 = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \\ c_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \end{cases}.$$

Zatem wzór na n-ty wyraz ciągu Fibonacciego to:
$F_n = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

Rekurencje liniowe jednorodne - uwagi

Rekurencje liniowe jednorodne - uwagi

- Twierdzenie o rozwiązywaniu rekurencji liniowych jednorodnych działa, nawet jeśli pierwiastki nie są rzeczywiste! Co prawda we wzorach będą się pojawiać liczby zespolone (r_1 i r_2), ale dla każdego konkretnego wyrazu części urojone się skrócą i otrzymamy wynik rzeczywisty (tak jak $\sqrt{5}$ się skracał w rozwiązaniu ciągu Fibonacciego).

Rekurencje liniowe jednorodne - uwagi

- Twierdzenie o rozwiązywaniu rekurencji liniowych jednorodnych działa, nawet jeśli pierwiastki nie są rzeczywiste! Co prawda we wzorach będą się pojawiać liczby zespolone (r_1 i r_2), ale dla każdego konkretnego wyrazu części urojone się skrócą i otrzymamy wynik rzeczywisty (tak jak $\sqrt{5}$ się skracał w rozwiązaniu ciągu Fibonacciego).
- Analogiczną metodę można stosować, gdy s_n zależy (w sposób liniowy) od więcej niż 2 poprzednich wyrazów - tylko wtedy wielomian charakterystyczny będzie stopnia większego niż 2 i znalezienie jego pierwiastków może być problematyczne.

Rekurencje liniowe niejednorodne

Niejednorodną liniową rekurencją (formalnie: drugiego stopnia) będziemy nazywać równanie postaci:

$$s_n = as_{n-1} + bs_{n-2} + f(n).$$

Rekurencje liniowe niejednorodne

Niejednorodną liniową rekurencją (formalnie: drugiego stopnia) będziemy nazywać równanie postaci:

$$s_n = as_{n-1} + bs_{n-2} + f(n).$$

Funkcję $f(n)$ nazywamy *wyrazem wolnym rekurencji*.

Rekurencje liniowe niejednorodne - rozwiązanie

O rozwiązaniu rekurencji liniowej niejednorodnej

Rozwiązaniem ogólnym rekurencji $s_n = as_{n-1} + bs_{n-2} + f(n)$ jest

$$s_n = \tilde{s}_n + s_n^*,$$

gdzie $\tilde{s}_n$ jest jest ogólnym rozwiązaniem rekurencji jednorodnej $s_n = as_{n-1} + bs_{n-2}$ (uzyskanym jak w poprzednim podrozdziale), a s_n^* jest dowolnym szczególnym rozwiązaniem rekurencji $s_n = as_{n-1} + bs_{n-2} + f(n)$ (dla dowolnie wybranych warunków początkowych).

Rekurencje liniowe niejednorodne - rozwiązanie

O rozwiązaniu rekurencji liniowej niejednorodnej

Rozwiązaniem ogólnym rekurencji $s_n = as_{n-1} + bs_{n-2} + f(n)$ jest

$$s_n = \tilde{s}_n + s_n^*,$$

gdzie $\tilde{s}_n$ jest jest ogólnym rozwiązaniem rekurencji jednorodnej $s_n = as_{n-1} + bs_{n-2}$ (uzyskanym jak w poprzednim podrozdziale), a s_n^* jest dowolnym szczególnym rozwiązaniem rekurencji $s_n = as_{n-1} + bs_{n-2} + f(n)$ (dla dowolnie wybranych warunków początkowych).

Niestety, nie ma ogólnej metody pozwalającej na wskazanie s_n^* - to rozwiązanie trzeba zgadnąć.

Rekurencje liniowe niejednorodne - rozwiązanie

O rozwiązaniu rekurencji liniowej niejednorodnej

Rozwiązaniem ogólnym rekurencji $s_n = as_{n-1} + bs_{n-2} + f(n)$ jest

$$s_n = \tilde{s}_n + s_n^*,$$

gdzie $\tilde{s}_n$ jest jest ogólnym rozwiązaniem rekurencji jednorodnej $s_n = as_{n-1} + bs_{n-2}$ (uzyskanym jak w poprzednim podrozdziale), a s_n^* jest dowolnym szczególnym rozwiązaniem rekurencji $s_n = as_{n-1} + bs_{n-2} + f(n)$ (dla dowolnie wybranych warunków początkowych).

Niestety, nie ma ogólnej metody pozwalającej na wskazanie s_n^* - to rozwiązanie trzeba zgadnąć. Jednak w kilku typowych sytuacjach, nasze „zgadywanie” da się zalgorytmizować (tzw. metodą przewidywań), w czym pomoże nam kolejne twierdzenie.

Metoda przewidywań

Metoda przewidywań

Przy wcześniejszych oznaczeniach zakładamy, że wyraz wolny jest funkcją $f(n) = P(n)q^n$, gdzie $P(n)$ jest wielomianem.
Wtedy rozwiązanie szczególne rekurencji jest postaci
$s_n^* = Q(n) \cdot q^n \cdot n^k$, gdzie $Q(n)$ jest wielomianem stopnia takiego jak $P(n)$, a k - krotnością pierwiastka q w równaniu charakterystycznym.

Metoda przewidywań

Metoda przewidywań

Przy wcześniejszych oznaczeniach zakładamy, że wyraz wolny jest funkcją $f(n) = P(n)q^n$, gdzie $P(n)$ jest wielomianem.
Wtedy rozwiązanie szczególne rekurencji jest postaci $s_n^* = Q(n) \cdot q^n \cdot n^k$, gdzie $Q(n)$ jest wielomianem stopnia takiego jak $P(n)$, a k - krotnością pierwiastka q w równaniu charakterystycznym.

Współczynniki wielomianu Q obliczamy wstawiając s_n^* do równania rekurencyjnego. Przypominam, że stała też jest wielomianem (stopnia zero)!

Rekurencje niejednorodne - przykład

Zadanie

$s_0 = -3$, $s_1 = 36$, $s_n = -6s_{n-1} - 9s_{n-2} + 3^n$.

Rekurencje niejednorodne - przykład

Zadanie

$s_0 = -3,\ s_1 = 36,\ s_n = -6s_{n-1} - 9s_{n-2} + 3^n.$

Równanie charakterystyczne ma dla części jednorodnej
$s_n = -6s_{n-1} - 9s_{n-2}$ postać: $x^2 + 6x + 9 = 0$

Rekurencje niejednorodne - przykład

Zadanie

$s_0 = -3,\ s_1 = 36,\ s_n = -6s_{n-1} - 9s_{n-2} + 3^n.$

Równanie charakterystyczne ma dla części jednorodnej $s_n = -6s_{n-1} - 9s_{n-2}$ postać: $x^2 + 6x + 9 = 0$ i jeden pierwiastek podwójny $r = -3$.

Rekurencje niejednorodne - przykład

Zadanie

$s_0 = -3,\ s_1 = 36,\ s_n = -6s_{n-1} - 9s_{n-2} + 3^n.$

Równanie charakterystyczne ma dla części jednorodnej $s_n = -6s_{n-1} - 9s_{n-2}$ postać: $x^2 + 6x + 9 = 0$ i jeden pierwiastek podwójny $r = -3$. Otrzymujemy:

$$\tilde{s}_n = c_1(-3)^n + c_2 n(-3)^n.$$

Rekurencje niejednorodne - przykład

Zadanie

$s_0 = -3,\ s_1 = 36,\ s_n = -6s_{n-1} - 9s_{n-2} + 3^n.$

Równanie charakterystyczne ma dla części jednorodnej $s_n = -6s_{n-1} - 9s_{n-2}$ postać: $x^2 + 6x + 9 = 0$ i jeden pierwiastek podwójny $r = -3$. Otrzymujemy:

$$\tilde{s}_n = c_1(-3)^n + c_2 n(-3)^n.$$

$f(n) = 3^n$. Zatem $P(n) = 1$ jest wielomianem stopnia 0 i $q = 3$ nie jest pierwiastkiem równania $x^2 + 6x + 9 = 0$,

Rekurencje niejednorodne - przykład

Zadanie

$s_0 = -3,\ s_1 = 36,\ s_n = -6s_{n-1} - 9s_{n-2} + 3^n.$

Równanie charakterystyczne ma dla części jednorodnej $s_n = -6s_{n-1} - 9s_{n-2}$ postać: $x^2 + 6x + 9 = 0$ i jeden pierwiastek podwójny $r = -3$. Otrzymujemy:

$$\tilde{s}_n = c_1(-3)^n + c_2 n(-3)^n.$$

$f(n) = 3^n$. Zatem $P(n) = 1$ jest wielomianem stopnia 0 i $q = 3$ nie jest pierwiastkiem równania $x^2 + 6x + 9 = 0$, przewidujemy więc rozwiązanie szczególne $s_n^* = A3^n$ ($k = 0,\ Q(n) = A$ - stopnia 0).

Rekurencje niejednorodne - przykład

Zadanie

$s_0 = -3,\ s_1 = 36,\ s_n = -6s_{n-1} - 9s_{n-2} + 3^n.$

...przewidujemy więc rozwiązanie szczególne $s_n^* = A3^n$.

Rekurencje niejednorodne - przykład

Zadanie

$s_0 = -3,\ s_1 = 36,\ s_n = -6s_{n-1} - 9s_{n-2} + 3^n.$

...przewidujemy więc rozwiązanie szczególne $s_n^* = A3^n$. W celu wyznaczenia A wstawiamy rozwiązanie s_n^* bezpośrednio do naszego równania rekurencyjnego, otrzymując:

$$A3^n = -6A3^{n-1} - 9A3^{n-2} + 3^n.$$

Rekurencje niejednorodne - przykład

Zadanie

$s_0 = -3,\ s_1 = 36,\ s_n = -6s_{n-1} - 9s_{n-2} + 3^n.$

...przewidujemy więc rozwiązanie szczególne $s_n^* = A3^n$. W celu wyznaczenia A wstawiamy rozwiązanie s_n^* bezpośrednio do naszego równania rekurencyjnego, otrzymując:

$$A3^n = -6A3^{n-1} - 9A3^{n-2} + 3^n.$$

Po skróceniu dostaniemy $4A3^n = 3^n$,

Rekurencje niejednorodne - przykład

Zadanie

$s_0 = -3,\ s_1 = 36,\ s_n = -6s_{n-1} - 9s_{n-2} + 3^n.$

...przewidujemy więc rozwiązanie szczególne $s_n^* = A3^n$. W celu wyznaczenia A wstawiamy rozwiązanie s_n^* bezpośrednio do naszego równania rekurencyjnego, otrzymując:

$$A3^n = -6A3^{n-1} - 9A3^{n-2} + 3^n.$$

Po skróceniu dostaniemy $4A3^n = 3^n$, więc $A = \frac{1}{4}$. Zatem ostatecznie $s_n^* = \frac{1}{4}3^n$.

Rekurencje niejednorodne - przykład

Zadanie

$s_0 = -3$, $s_1 = 36$, $s_n = -6s_{n-1} - 9s_{n-2} + 3^n$.

Skoro tak, na mocy twierdzenia o rekurencjach niejednorodnych mamy:

$$s_n = c_1(-3)^n + c_2 n(-3)^n + \frac{1}{4}3^n.$$

Rekurencje niejednorodne - przykład

Zadanie

$s_0 = -3,\ s_1 = 36,\ s_n = -6s_{n-1} - 9s_{n-2} + 3^n.$

Skoro tak, na mocy twierdzenia o rekurencjach niejednorodnych mamy:

$$s_n = c_1(-3)^n + c_2 n(-3)^n + \frac{1}{4}3^n.$$

Podstawiając $n = 0$ i $n = 1$ dostajemy:

$$\begin{cases} -3 = s_0 = c_1 + \frac{1}{4} \\ 36 = s_1 = -3c_1 - 3c_2 + \frac{3}{4} \end{cases} \quad \Rightarrow$$

Rekurencje niejednorodne - przykład

Zadanie

$s_0 = -3,\ s_1 = 36,\ s_n = -6s_{n-1} - 9s_{n-2} + 3^n.$

Skoro tak, na mocy twierdzenia o rekurencjach niejednorodnych mamy:

$$s_n = c_1(-3)^n + c_2 n(-3)^n + \frac{1}{4}3^n.$$

Podstawiając $n = 0$ i $n = 1$ dostajemy:

$$\begin{cases} -3 = s_0 = c_1 + \frac{1}{4} \\ 36 = s_1 = -3c_1 - 3c_2 + \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -\frac{13}{4} \\ c_2 = -\frac{17}{2} \end{cases}.$$

Rekurencje niejednorodne - przykład

Zadanie

$s_0 = -3,\ s_1 = 36,\ s_n = -6s_{n-1} - 9s_{n-2} + 3^n.$

Skoro tak, na mocy twierdzenia o rekurencjach niejednorodnych mamy:

$$s_n = c_1(-3)^n + c_2 n(-3)^n + \frac{1}{4}3^n.$$

Podstawiając $n = 0$ i $n = 1$ dostajemy:

$$\begin{cases} -3 = s_0 = c_1 + \frac{1}{4} \\ 36 = s_1 = -3c_1 - 3c_2 + \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -\frac{13}{4} \\ c_2 = -\frac{17}{2} \end{cases}.$$

Zatem ostateczne rozwiązanie (szczególne) to:
$s_n = -\frac{13}{4}(-3)^n - \frac{17}{2}n(-3)^n + \frac{1}{4}3^n.$

Rekurencje niejednorodne - przykład 2

Spróbujmy teraz „bez sztuczek", a przy pomocy systematycznego podejścia rozwiązać rekurencję wież z Hanoi.

Zadanie

$s_1 = 1$, $s_n = 2s_{n-1} + 1$.

Rekurencje niejednorodne - przykład 2

Spróbujmy teraz „bez sztuczek”, a przy pomocy systematycznego podejścia rozwiązać rekurencję wież z Hanoi.

Zadanie

$s_1 = 1$, $s_n = 2s_{n-1} + 1$.

Łatwo zauważyć, że w tym wypadku rozwiązaniem rekurencji jednorodnej $s_n = 2s_{n-1}$ jest:

$$\tilde{s}_n = c_1 2^n.$$

Rekurencje niejednorodne - przykład 2

Spróbujmy teraz „bez sztuczek”, a przy pomocy systematycznego podejścia rozwiązać rekurencję wież z Hanoi.

Zadanie

$s_1 = 1$, $s_n = 2s_{n-1} + 1$.

Łatwo zauważyć, że w tym wypadku rozwiązaniem rekurencji jednorodnej $s_n = 2s_{n-1}$ jest:

$$\tilde{s}_n = c_1 2^n.$$

$f(n) = 1$, więc $q = 1$, $k = 0$ i $P(n) = 1$ jest wielomianem stopnia zero.

Rekurencje niejednorodne - przykład 2

Spróbujmy teraz „bez sztuczek”, a przy pomocy systematycznego podejścia rozwiązać rekurencję wież z Hanoi.

Zadanie

$s_1 = 1$, $s_n = 2s_{n-1} + 1$.

Łatwo zauważyć, że w tym wypadku rozwiązaniem rekurencji jednorodnej $s_n = 2s_{n-1}$ jest:

$$\tilde{s}_n = c_1 2^n.$$

$f(n) = 1$, więc $q = 1$, $k = 0$ i $P(n) = 1$ jest wielomianem stopnia zero. Zatem możemy przewidzieć, że s_n^* będzie wielomianem stopnia zero, czyli stałą.

Rekurencje niejednorodne - przykład 2

Spróbujmy teraz „bez sztuczek", a przy pomocy systematycznego podejścia rozwiązać rekurencję wież z Hanoi.

Zadanie

$s_1 = 1$, $s_n = 2s_{n-1} + 1$.

Łatwo zauważyć, że w tym wypadku rozwiązaniem rekurencji jednorodnej $s_n = 2s_{n-1}$ jest:

$$\tilde{s}_n = c_1 2^n.$$

$f(n) = 1$, więc $q = 1$, $k = 0$ i $P(n) = 1$ jest wielomianem stopnia zero. Zatem możemy przewidzieć, że s_n^* będzie wielomianem stopnia zero, czyli stałą. Niech $s_n^* = C$.

Rekurencje niejednorodne - przykład 2

Zadanie

$s_1 = 1,\ s_n = 2s_{n-1} + 1.$

Niech $s_n^* = C$.

Rekurencje niejednorodne - przykład 2

Zadanie

$s_1 = 1, \; s_n = 2s_{n-1} + 1.$

Niech $s_n^* = C$. W celu wyznaczenia C wstawiamy rozwiązanie s_n^* bezpośrednio do naszego równania rekurencyjnego, otrzymując: $C = 2C + 1.$

Rekurencje niejednorodne - przykład 2

Zadanie

$s_1 = 1$, $s_n = 2s_{n-1} + 1$.

Niech $s_n^* = C$. W celu wyznaczenia C wstawiamy rozwiązanie s_n^* bezpośrednio do naszego równania rekurencyjnego, otrzymując: $C = 2C + 1$. Stąd $C = -1$, czyli $s_n^* = -1$

Rekurencje niejednorodne - przykład 2

Zadanie

$s_1 = 1$, $s_n = 2s_{n-1} + 1$.

Skoro tak, na mocy twierdzenia o rekurencjach niejednorodnych mamy:

$$s_n = c_1 2^n - 1.$$

Rekurencje niejednorodne - przykład 2

Zadanie

$s_1 = 1$, $s_n = 2s_{n-1} + 1$.

Skoro tak, na mocy twierdzenia o rekurencjach niejednorodnych mamy:

$$s_n = c_1 2^n - 1.$$

Podstawiając $n = 1$ otrzymujemy:

$$1 = s_1 = c_1 2^1 - 1 = 2c_1 - 1 \Rightarrow c_1 = 1.$$

Rekurencje niejednorodne - przykład 2

Zadanie

$s_1 = 1$, $s_n = 2s_{n-1} + 1$.

Skoro tak, na mocy twierdzenia o rekurencjach niejednorodnych mamy:

$$s_n = c_1 2^n - 1.$$

Podstawiając $n = 1$ otrzymujemy:

$$1 = s_1 = c_1 2^1 - 1 = 2c_1 - 1 \Rightarrow c_1 = 1.$$

Zatem ostateczne rozwiązanie (szczególne) to: $s_n = 2^n - 1$.