

## 2b. Sposoby zapisu i macierze grafów

Grzegorz Kosiorowski

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

# Funkcyjna definicja grafu

## Graf

*Grafem* lub *grafem ogólnym* nazywamy parę  $G = (V, E)$ , gdzie:

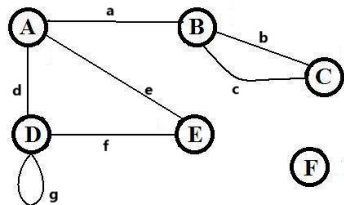
- 1)  $V$  (czasem zapisywany  $V(G)$ ) jest zbiorem *wierzchołków* (*węzłów*, *punktów*)
- 2)  $E$  (czasem zapisywany  $E(G)$ ) jest multizbiorem *krawędzi* (które mogą się powtarzać), czyli jedno- i dwu-elementowych podzbiorów  $V$ .

## Graf - alternatywna definicja

*Grafem* lub *grafem ogólnym* nazywamy trójkę  $G = (V, E, \varphi)$ , gdzie:

- 1)  $V$  jest zbiorem *wierzchołków* (*węzłów*, *punktów*)
- 2)  $E$  jest zbiorem *krawędzi*.
- 3)  $\varphi$  jest funkcją ze zbioru  $E$  w zbiór jedno- i dwu-elementowych podzbiorów  $V$ .

# Przykład funkcyjnej definicji grafu



Po prawej zapisuję w skrócie  $XY$  zamiast  $\{X, Y\}$  i  $X$  zamiast  $\{X\}$ .

Jednoelementowa wartość funkcji  $\varphi$  oznacza pętlę.

$$V = \{A, B, C, D, E, F\};$$

$$E = \{a, b, c, d, e, f, g\};$$

$x$	$\varphi(x)$
a	AB
b	BC
c	BC
d	AD
e	AE
f	DE
g	D

# Definicja funkcyjna grafu skierowanego

## Grafy skierowane

*Grafem skierowanym* lub *digrafem* nazywamy parę

$G = (V, E)$ , gdzie:

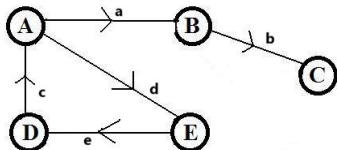
- 1)  $V$  jest zbiorem *wierzchołków* (*węzłów, punktów*)
- 2)  $E$  jest multizbiorem krawędzi skierowanych (które mogą się powtarzać), czyli elementów  $V \times V$ .

## Graf skierowanym - alternatywna definicja

*Grafem skierowanym* nazywamy trójkę  $G = (V, E, \varphi)$ , gdzie:

- 1)  $V$  jest zbiorem *wierzchołków* (*węzłów, punktów*)
- 2)  $E$  jest zbiorem *krawędzi*.
- 3)  $\varphi$  jest funkcją ze zbioru  $E$  w zbiór  $V \times V$ .

# Przykład funkcyjnej definicji grafu skierowanego



Dla grafu skierowanego wartościami funkcji  $\varphi$  są pary uporządkowane (ciągi 2-elementowe), a nie podzbiory.

$$V = \{A, B, C, D, E\};$$

$$E = \{a, b, c, d, e\};$$

x	$\varphi(x)$
a	(A,B)
b	(B,C)
c	(D,A)
d	(A,E)
e	(E,D)

# Zapis funkcyjny (lista) i macierzowy w praktyce

- Zwykle grafy są przechowywane w pamięci komputerów właśnie jako listy wartości funkcji  $\varphi$ .
- Niektóre, dedykowane do pracy na grafach, środowiska programowania (*Matlab*, *Scilab*, *Ocatave*) posługują się jednak zapisem macierzowym.
- Macierzowe zapisy grafów są wygodne dla ludzi.
- Macierzowe postaci grafów są też potężnym narzędziem badań grafów (tzw. algebraiczna teoria grafów).

# Macierz incydencji dla grafu ogólnego

## Macierz incydencji grafu nieskierowanego

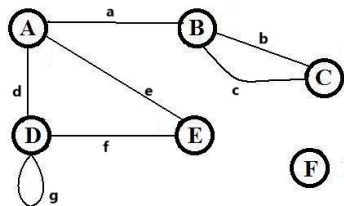
Niech  $G = (V, E)$  będzie grafem nieskierowanym,  
 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ,  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ . Wtedy *macierz incydencji* grafu  $G$  to:

$$A(G) = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix},$$

gdzie dla  $i \in \{1, \dots, n\}$  i  $j \in \{1, \dots, m\}$

$$a_{ij} = \begin{cases} 2, & \text{jeśli krawędź } e_j \text{ jest pętlą z wierzchołka } v_i; \\ 1, & \text{jeśli } v_i \text{ jest incydentny z } e_j, \text{ która nie jest pętlą;} \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

# Przykład macierzy incydencji



Po prawej macierz incydencji powyższego grafu.

$$V = \{A, B, C, D, E, F\};$$

$$E = \{a, b, c, d, e, f, g\};$$

$$A(G) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$



# Własności macierzy incydencji grafów nieskierowanych

- Suma elementów każdej kolumny macierzy incydencji grafu nieskierowanego wynosi 2.
- Suma elementów wiersza to stopień wierzchołka odpowiadającego temu wierszowi.
- W macierzy incydencji jest tyle wyrazów równych 2, ile jest pętli w grafie. Jeśli w macierzy incydencji występują identyczne kolumny, krawędzie odpowiadające tym kolumnom tworzą w grafie krawędź wielokrotną.
- W zadaniach domyślny porządek wierzchołków i krawędzi grafu to porządek alfabetyczny (jeśli są oznaczone literami) lub taki, jaki na liczbach rzeczywistych (jeśli są oznaczone liczbami).
- Zamiana miejscami dwóch wierszy/dwóch kolumn macierzy incydencji jest równoważna z zamianą nazw (przeetykietowaniem) dwóch wierzchołków/dwóch krawędzi w grafie.

# Informacje odczytane z macierzy incydencji grafu ogólnego

$$A(G) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Stopnie wierzchołków grafu  $G$  to kolejno: 3,3,2,4,2,0. Ostatni wierzchołek jest wierzchołkiem izolowanym.
- Graf nie jest prosty, bo ma jedną pętlę (przy czwartym wierzchołku) i krawędź wielokrotną (złożoną z krawędzi drugiej i trzeciej).

# Macierz incydencji dla grafu skierowanego

## Macierz incydencji grafu skierowanego

Niech  $G = (V, E)$  będzie grafem skierowanym bez pętli,  
 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ,  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ . Wtedy *macierz incydencji*  
grafu  $G$  to:

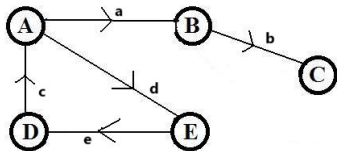
$$A(G) = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix},$$

gdzie dla  $i \in \{1, \dots, n\}$  i  $j \in \{1, \dots, m\}$

$$a_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{jeśli } e_j = (k, i) \text{ dla pewnego } k; \\ 1, & \text{jeśli } e_j = (i, k) \text{ dla pewnego } k; \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Czasem używana jest notacja z przeciwnymi znakami.

# Przykład macierzy incydencji grafu skierowanego



Po prawej macierz incydencji powyższego grafu.

$$V = \{A, B, C, D, E\};$$

$$E = \{a, b, c, d, e\};$$

$$A(G) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

# Własności macierzy incydencji grafów skierowanych

- Suma elementów każdej kolumny macierzy incydencji grafu skierowanego wynosi 0.
- Suma dodatnich elementów wiersza to stopień wyjściowy wierzchołka odpowiadającego temu wierszowi, a wartość bezwzględna z sumy elementów ujemnych wiersza to stopień wejściowy tego wierzchołka.
- Dla grafów skierowanych z pętlami nie tworzy się macierzy incydencji (gdyż pętle „zerowałyby się” przy zaznaczaniu wierzchołków do których wchodzi i wychodzą).
- Zamiana miejscami dwóch wierszy/dwóch kolumn macierzy incydencji jest równoważna z zamianą nazw (przeetykietowaniem) dwóch wierzchołków/dwóch krawędzi w grafie.

# Macierz sąsiedztwa dla grafu ogólnego

## Macierz sąsiedztwa grafu nieskierowanego

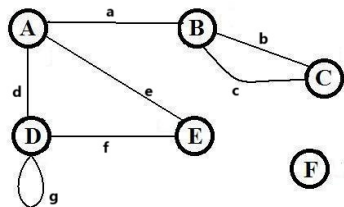
Niech  $G = (V, E)$  będzie grafem nieskierowanym,  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ,  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ . Wtedy *macierz sąsiedztwa* grafu  $G$  to:

$$B(G) = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix},$$

gdzie dla  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $b_{ij} = b_{ji}$  jest liczbą krawędzi łączących wierzchołki  $v_i$  i  $v_j$  (pętle liczymy pojedynczo!)

Według niektórych definicji, pętle liczy się w macierzy sąsiedztwa podwójnie.

# Przykład macierzy sąsiedztwa



Po prawej macierz sąsiedztwa powyższego grafu.

$$V = \{A, B, C, D, E, F\};$$

$$B(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

# Własności macierzy sąsiedztwa grafów nieskierowanych

- Macierz sąsiedztwa grafu ogólnego jest kwadratowa (o wymiarze  $|V| \times |V|$ ) i symetryczna.
- Jeśli graf nie zawiera pętli, suma elementów każdego wiersza (lub kolumny) to stopień wierzchołka odpowiadającego temu wierszowi (lub kolumnie).
- Ślad macierzy  $B(G)$  (czyli suma elementów na przekątnej tej macierzy) to liczba pętli w grafie nieskierowanym. Graf ma krawędzie wielokrotne, jeśli w macierzy pojawiają się liczby większe od 1.



# Informacje odczytane z macierzy sąsiedztwa grafu ogólnego

$$B(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Stopnie wierzchołków grafu  $G$  to kolejno: 3,3,2,4,2,0. Dla czwartego wierzchołka stopień nie jest sumą wyrazów odpowiedniego wiersza/kolumny macierzy, bo pętlę (czyli wyraz na przekątnej) w obliczaniu stopnia musimy dodać dwukrotnie.
- Graf nie jest prosty, bo ma jedną pętlę (bo  $\text{tr } B(G) = 1$ ) i krawędź wielokrotną ( $b_{23} = b_{32} = 2$ ).

# Macierz sąsiedztwa grafu skierowanego

## Macierz sąsiedztwa grafu skierowanego

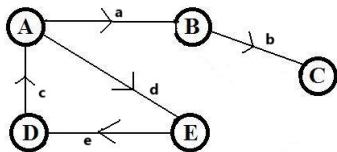
Niech  $G = (V, E)$  będzie grafem skierowanym,  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ,  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ . Wtedy *macierz sąsiedztwa* grafu  $G$  to:

$$B(G) = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix},$$

gdzie dla  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $b_{ij}$  jest liczbą krawędzi prowadzących z wierzchołka  $v_i$  do wierzchołka  $v_j$  (pętle liczymy pojedynczo!)

Według niektórych definicji, pętle liczy się w macierzy sąsiedztwa podwójnie.

# Przykład macierzy sąsiedztwa grafu skierowanego



Po prawej macierz sąsiedztwa powyższego grafu.

$$V = \{A, B, C, D, E\};$$

$$B(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

# Własności macierzy sąsiedztwa grafów skierowanych

- Macierz sąsiedztwa grafu skierowanego jest kwadratowa (o wymiarze  $|V| \times |V|$ , ale zazwyczaj nie symetryczna).
- Jeśli graf nie zawiera pętli, suma elementów każdego wiersza to stopień wyjściowy wierzchołka odpowiadającego temu wierszowi, a suma elementów każdej kolumny to stopień wejściowy wierzchołka odpowiadającego tej kolumnie.
- Ślad macierzy  $B(G)$  (czyli suma elementów na przekątnej tej macierzy) to liczba pętli w grafie skierowanym.

# Informacje odczytane z macierzy sąsiedztwa grafu skierowanego

$$B(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Stopień wejściowy każdego wierzchołka grafu  $G$  wynosi 1. Stopnie wyjściowe kolejnych wierzchołków grafu  $G$  wynoszą 2, 1, 0, 1, 1.
- Graf jest prosty, bez pętli ( $\text{tr } G = 0$ ) i krawędzi wielokrotnych.

# Macierzowe charakterystyki grafu

W prezentacji o izomorfizmach grafów dokładniej omówimy przyczynę, ale warto zwrócić uwagę, że podstawowe charakterystyki liczbowe macierzy sąsiedztwa nie zależą od etykietowania wierzchołków i sposobu narysowania grafu. Dlatego sens ma poniższa definicja:

## Macierzowe charakterystyki grafu

Niech  $G$  będzie grafem skierowanym lub nieskierowanym. Wtedy:  
*Wyznacznikiem* grafu  $G$  ( $\det G$ ) nazywamy wyznacznik jego macierzy sąsiedztwa  $\det B(G)$ .

*Śladem* grafu  $G$  ( $\text{tr } G$ ) nazywamy ślad jego macierzy sąsiedztwa  $\text{tr } B(G)$ .  
Wielomian charakterystyczny, wartości i wektory własne grafu  $G$  to wielomian charakterystyczny, wartości i wektory własne jego macierzy sąsiedztwa.

Badaniem wartości własnych grafów i ich wpływem na własności grafu zajmuje się spektralna teoria grafów.

# Interpretacja potęg macierzy sąsiedztwa

Najciekawszą konsekwencją definicji macierzy sąsiedztwa jest interpretacja potęgowania tej macierzy (które jest możliwe, gdyż macierz sąsiedztwa jest kwadratowa).

## Twierdzenie o potędze macierzy sąsiedztwa

Niech  $G = (V, E)$  będzie grafem skierowanym lub nieskierowanym,  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . Wtedy liczba dróg (niekoniecznie prostych) długości  $n$  pomiędzy wierzchołkami  $v_i$  i  $v_j$  wynosi  $m_{ij}$ , gdzie  $m_{ij}$  jest odpowiednim elementem poniższej macierzy:

$$(B(G))^n = M = \begin{bmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ m_{n1} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix}.$$

# Wnioski z twierdzenia o potędze macierzy sąsiedztwa

## Wniosek 1 z twierdzenia o potędze MS

Liczba dróg (niekoniecznie prostych) długości co najwyżej  $k$  pomiędzy wierzchołkami  $v_i$  i  $v_j$  wynosi  $m_{ij}$ , gdzie  $m_{ij}$  jest odpowiednim elementem poniższej macierzy:

$$B(G) + (B(G))^2 + \dots + (B(G))^k = M = \begin{bmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ m_{n1} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix} .$$



# Wnioski z twierdzenia o potężde macierzy sąsiedztwa

Z poprzedniego wniosku i z faktu, że w grafie nieskierowanym spójnym o  $n$  wierzchołkach z każdego wierzchołka do każdego innego istnieje droga długości co najwyżej  $n - 1$  wynika, że:

## Wniosek 2 z twierdzenia o potężde MS

Jeśli  $G$  jest grafem ogólnym i  $V(G) = n > 2$  to  $G$  jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy macierz

$$B(G) + (B(G))^2 + \dots + (B(G))^{n-1} = M = \begin{bmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ m_{n1} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix}.$$

nie zawiera elementów równych 0.

# Wnioski z twierdzenia o potęgze macierzy sąsiedztwa

## Wniosek 3 z twierdzenia o potęgze MS

$$\text{tr}((B(G))^2) = 2|E(G)|.$$

## Wniosek 4 z twierdzenia o potęgze MS

Niech  $G$  będzie grafem prostym, nieskierowanym. Liczba cykli długości 3 (tak zwanych *trójkątów*) w grafie  $G$  wynosi  $\frac{1}{6} \text{tr}((B(G)))^3$ .

Jako, że z algebry liniowej wiemy, że zarówno wartości własne potęg macierzy wyjściowej, jak i ślady tych potęg możemy obliczyć znając wartości własne macierzy wyjściowej, powyższe twierdzenia są przykładem zastosowań spektralnej teorii grafów.

# Macierz stopni

## Macierz stopni

Niech  $G = (V, E)$  będzie grafem nieskierowanym,  
 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . Wtedy *macierz stopni* grafu  $G$  to:

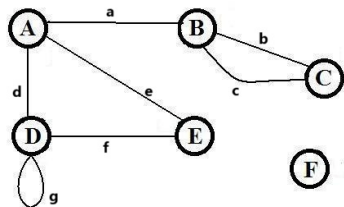
$$D(G) = \begin{bmatrix} d_{11} & \dots & d_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ d_{n1} & \dots & d_{nn} \end{bmatrix},$$

gdzie

$$d_{ij} = \begin{cases} \deg v_i, & \text{jeśli } i = j; \\ 0, & \text{jeśli } i \neq j. \end{cases}$$

Macierz stopni jest macierzą kwadratową i diagonalną.

# Przykład macierzy stopni



Po prawej macierz stopni powyższego grafu.

$$V = \{A, B, C, D, E, F\};$$

$$D(G) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

# Macierz Laplace'a (Kirchhoffa)

W zagadnieniach związanych z mechaniką klasyczną i kwantową, elektrotechniką oraz z uczeniem maszynowym (machine learning) zastosowania znajdują tak zwane macierze Laplace'a lub Kirchhoffa:

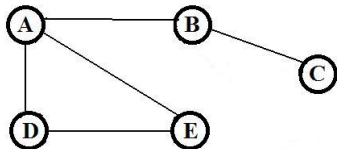
## Macierz Laplace'a (Kirchhoffa)

Niech  $G = (V, E)$  będzie grafem **prostym** nieskierowanym,  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . Wtedy *macierzą Laplace'a* lub *macierzą Kirchhoffa* grafu  $G$  nazywamy macierz:

$$L(G) = D(G) - B(G)$$

gdzie  $D(G)$  jest macierzą stopni, a  $B(G)$  - macierzą sąsiedztwa grafu  $G$ .

# Przykład macierzy Laplace'a



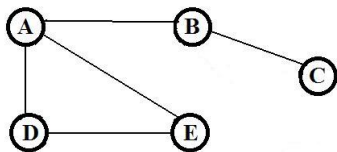
Po prawej macierze sąsiedztwa i stopni powyższego grafu.

$$V = \{A, B, C, D, E\};$$

$$B(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$D(G) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

# Przykład macierzy Laplace'a



Po prawej macierz Laplace'a powyższego grafu.

$$V = \{A, B, C, D, E\};$$

$$L(G) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

# Własności macierzy Laplace'a

- Macierz Laplace'a jest symetryczna i dodatnio półokreślona.
- Suma elementów w każdym wierszu i w każdej kolumnie macierzy Laplace'a wynosi 0.
- $\det L(G) = 0$ ,  $\text{tr } L(G) = 2|E(G)|$ .



# Graf przejścia

W badaniu sieci (np. społecznych) za pomocą tak zwanych procesów Markowa (znanych z algebry liniowej) przydają się grafy przejścia i ich macierze przejścia.

## Graf przejścia

Graf skierowany z wagami  $G = (V, E)$  nazywamy *grafem przejścia*, jeśli zbiór wierzchołków  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  reprezentuje zbiór możliwych stanów, w jakich mogą się znajdować uczestnicy pewnego zmieniającego się układu, krawędź  $(v_i, v_j)$  istnieje, gdy możliwe jest przejście ze stanu  $v_i$  do stanu  $v_j$ , a waga  $w(v_i, v_j)$  przypisana takiej krawędzi oznacza prawdopodobieństwo przejścia ze stanu  $i$  do stanu  $j$  (lub pozostania w tym samym stanie, jeśli  $i = j$ ).

## Macierz przejścia

Macierzą przejścia  $P(G)$  grafu przejścia  $G$  nazywamy macierz kwadratową:

$$P(G) = \begin{bmatrix} p_{11} & \dots & p_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix},$$

gdzie  $p_{ij}$  to prawdopodobieństwo przejścia ze stanu  $j$  do stanu  $i$  (lub pozostania w tym samym stanie, jeśli  $i = j$ ).

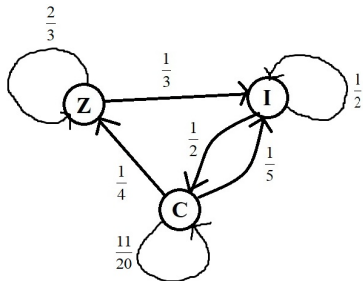
W większości zastosowań,  $P(G)$  jest macierzą Markowa, czyli elementy każdej jej kolumny sumują się do 1.

# Przykładowe zagadnienie grafów przejścia

## Przykład

W pewnym eksperymencie próbkę komórek poddano działaniu pewnego wirusa i pewnego leku. Co godzinę zapisywano liczbę komórek zdrowych, liczbę komórek zainfekowanych wirusem, ale nie przejawiających objawów choroby i komórek chorych. Średnio, co godzinę  $\frac{1}{3}$  komórek zdrowych stawała się zainfekowana,  $\frac{1}{2}$  komórek zainfekowanych stawała się chorymi, a z komórek chorych  $\frac{1}{4}$  zdrowiała, a  $\frac{1}{5}$  wracała do stanu „uśpionej infekcji”. Reszta pozostawała w takim stanie, w jakim była wcześniej. Zapisać graf i macierz przejścia tego układu.

# Przykład grafu i macierzy przejścia



$$P(G) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{11}{20} \end{bmatrix}.$$

Macierz przejścia danego układu dla kolejności stanów (Z,I,C).

Graf przejścia opisanego wcześniej układu (Z-zdrowe, I - zainfekowane, C - chore).

# Interpretacja macierzy przejścia

Jeśli mamy dany wektor obecnego stanu układu (czyli wektor zapisujący, ilu uczestników układu jest w każdym stanie  $v_i$ ), to mnożąc go przez macierz przejścia otrzymamy wektor kolejnego stanu układu.

Na przykład, dla rozważanego problemu, jeśli założymy, że w pewnym momencie było w układzie 60 komórek zdrowych, 40 komórek zainfekowanych i 100 komórek chorych, możemy obliczyć:

$$P(G) \cdot \begin{bmatrix} 60 \\ 40 \\ 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{11}{20} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 60 \\ 40 \\ 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 65 \\ 60 \\ 75 \end{bmatrix}$$

Zatem po godzinie możemy się spodziewać, że w układzie będzie 65 komórek zdrowych, 60 zainfekowanych i 75 chorych.

# Zależność macierzy incydencji i sąsiedztwa

Zakończymy kilkoma ciekawymi wynikami algebraicznej teorii grafów.

## Zależność macierzy incydencji i sąsiedztwa

Niech  $G$  będzie grafem nieskierowanym, prostym. Wtedy:

$$A(G) \cdot (A(G))^T = B(G) + D(G).$$

# Macierz incydencji i drzewo

## Macierz incydencji i drzewo

Niech  $G$  będzie grafem prostym, skierowanym, o  $n$  wierzchołkach, a macierz  $M$  wymiaru  $(n - 1) \times (n - 1)$  będzie minorem (podmacierzą) macierzy incydencji  $A(G)$ , w której kolumny odpowiadają krawędziom z pewnego podzbioru  $E(M)$  zbioru krawędzi grafu  $E(G)$ .

Przy tych założeniach, graf  $H = (V(G), E(M))$  jest drzewem wtedy i tylko wtedy, gdy  $\det M \neq 0$ .

## Wniosek

Jeśli  $G$  jest spójnym, prostym grafem skierowanym o  $n$  wierzchołkach, to rząd jego macierzy incydencji  $A(G)$  wynosi  $n - 1$ .

# Wartości własne i stopień maksymalny

Macierz sąsiedztwa w grafie nieskierowanym jest symetryczna, a więc jej wartości własne są rzeczywiste. Można jednak uzyskać coś więcej.

## Wartości własne i stopień maksymalny

Niech  $G$  będzie grafem prostym, nieskierowanym. Wtedy, jeśli  $\lambda$  jest wartością własną  $G$ , to:

$$|\lambda| \leq \Delta(G),$$

a równość  $|\lambda| = \Delta(G)$  zachodzi tylko jeśli jakaś składowa spójna grafu  $G$  jest  $\Delta(G)$ -regularna.