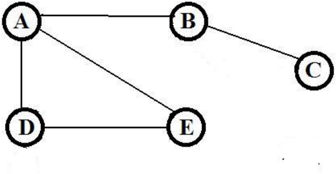
1a. Wstępne pojęcia teorii grafów

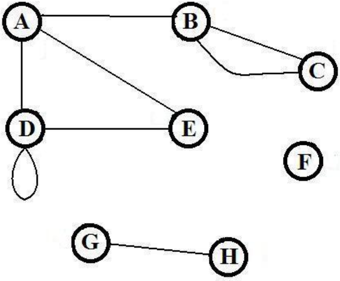
Grzegorz Kosiorowski

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

Graf, jaki jest, każdy widzi

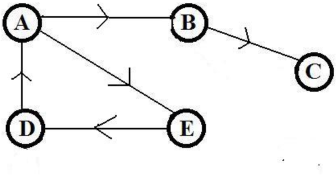


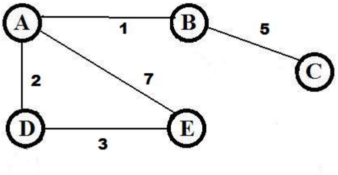
To oczywiście jest graf.



A czy to też?

Graf, jaki jest, każdy widzi





Możemy chcieć zaznaczyć „jednokierunkowość” krawędzi.

Lub ich „długość”.

Do czego służą grafy? Przykłady zastosowań

- Mapa drogowa (np. znajdowanie najkrótszej drogi)
- Schemat blokowy algorytmu (wybór najmniej kosztochłonnej ścieżki rozwiązania problemu).
- Sieć społeczna (zoptymalizowanie przepływu informacji, zlokalizowanie kluczowych osób, analiza handlu między firmami).
- Drzewo genealogiczne lub hierarchiczne (wyszukiwanie stopnia pokrewieństwa, zależności służbowej itp.).
- Wiązania między cząsteczkami (badania struktur chemicznych i biologicznych)
- Sieć komputerowa z połączeniami (optymalizacja przepływu informacji, badanie przepustowości sieci)
- Schemat fragmentu Internetu z linkami między stronami (algorytmy wyszukiwania stron np. PageRank)
- Sieci elektryczne (projektowanie takich sieci, minimalizacja kosztów)

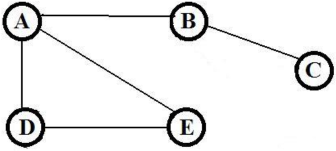
Definicja grafu

Graf

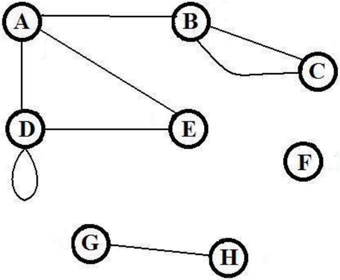
Grafem lub *grafem ogólnym (nieskierowanym)* nazywamy parę $G = (V, E)$, gdzie:
1) V (czasem zapisywany $V(G)$) jest zbiorem *wierzchołków* (*węzłów*, *punktów*)
2) E (czasem zapisywany $E(G)$) jest multizbiorem *krawędzi* (które mogą się powtarzać), czyli jedno- i dwu-elementowych podzbiorów V.

Będziemy się zajmować głównie grafami *skończonymi*, czyli o skończonej liczbie wierzchołków i krawędzi. Odtąd domyślnie zakładamy, że każdy wspomniany na wykładzie graf jest skończony.
Graf najczęściej utożsamiamy z jego „rysunkiem", choć sposób narysowania nie ma znaczenia (tylko istnienie wierzchołków i krawędzi). W tym sensie, obydwa obiekty z pierwszego slajdu to grafy. Kółka z literami to wierzchołki (litery w tym wypadku są *etykietami* czyli nazwami wierzchołków), a odcinki je łączące to krawędzie.

Przypomnienie przykładów



To oczywiście jest graf.



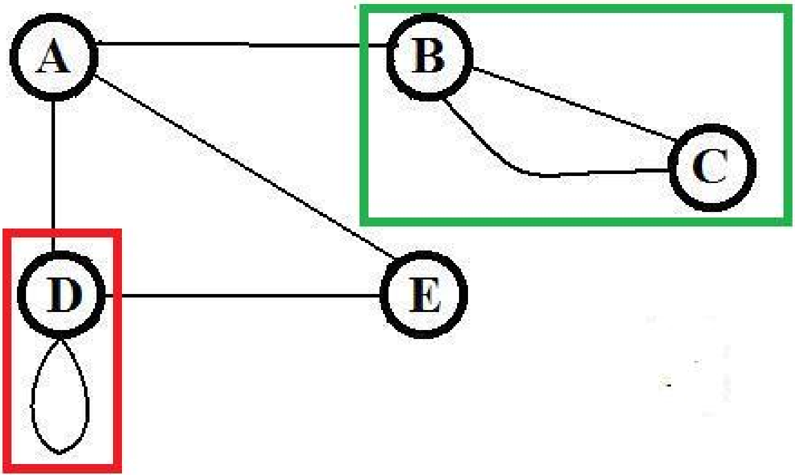
To też.

Ale graf po prawej jest ciut inny.

Doprecyzujmy parę pojęć...

- Krawędź łączącą wierzchołki o nazwach U i V domyślnie zapisujemy jako UV (czasem też bezpośrednio wybieramy nazwy dla krawędzi). Jako, że kierunek krawędzi nie jest wyróżniony VU oznacza to samo co UV (póki nie zajmujemy się grafami skierowanymi...).
- Jeśli taka krawędź istnieje, mówimy, że U i V są *sąsiadami*, a krawędź UV nazywamy *incydentną* z U i V.
- Jeśli wierzchołki U i V łączy więcej niż jedna krawędź, to mówimy, że między nimi jest krawędź wielokrotna.
- Krawędź UV nazywamy *pętlą* jeśli $U = V$.

Pętla i krawędź wielokrotna



W zielonym prostokącie - krawędź wielokrotna, w czerwonym - pętla.

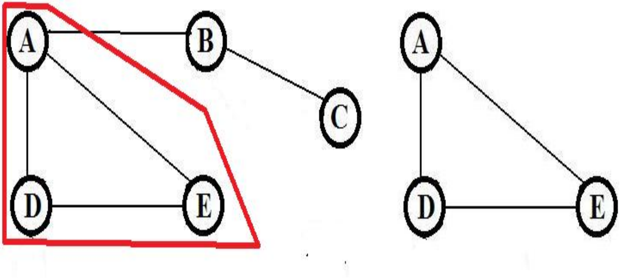
Definicja grafu

Graf prosty

Grafem prostym nazywamy parę $G = (V, E)$, gdzie:
1) V jest zbiorem *wierzchołków* (*węzłów*, *punktów*)
2) E jest zbiorem różnych krawędzi o różnych końcach.

Czyli graf prosty, to taki, w którym nie ma pętli i krawędzi wielokrotnych. Tylko jeden graf z pierwszego slajdu jest prosty. Na grafy, które nie są proste czasem mówi się *multigrafy* lub *pseudografy*.

Podgraf

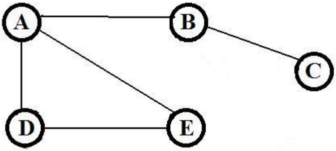


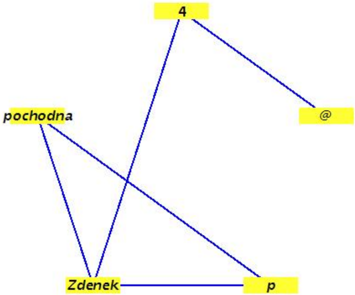
Graf po prawej jest podgrafem grafu po lewej.

Podgraf

Graf H składający się tylko z (niekoniecznie wszystkich) wierzchołków i łączących je krawędzi należących do grafu G nazywamy *podgrafem* G. Formalnie H jest podgrafem G, H jest grafem, $V(H) \subset V(G)$ i $E(H) \subset E(G)$.

Grafy izomorficzne - przykład





Zauważmy, że te dwa grafy (z matematycznego punktu widzenia) są takie same - różnią się tylko nazwami wierzchołków (A-Zdenek, B-4, C-@, D-pochodna, E-p) i sposobem narysowania. Ich struktura, czyli liczba wierzchołków i połączenia między nimi są te same.

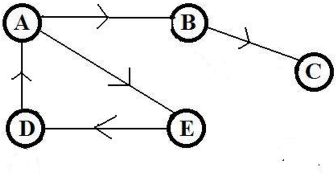
Grafy izomorficzne - formalizacja

Grafy izomorficzne

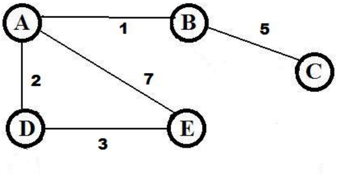
Dwa grafy G i H nazywamy *izomorficznymi* jeśli istnieje bijekcja (czyli odwzorowanie „jeden do jednego") $\psi : V(G) \to V(H)$ zachowująca sąsiedztwo wierzchołków, czyli taka, że liczba krawędzi łączących wierzchołki u i v w grafie G jest taka sama jak liczba krawędzi łączących wierzchołki $\psi(u)$ i $\psi(v)$ w grafie H.
Izomorficzność grafów G i H zapisujemy $G \simeq H$.

W ramach tego kursu nie będziemy rozróżniać grafów izomorficznych (chyba, że do praktycznych zastosowań, gdzie konkretne nazwy wierzchołków lub sposób narysowania mogą być wygodniejsze). Zatem dla nas grafy izomorficzne są dla nas takie same. Więcej o rozpoznawaniu i własnościach grafów izomorficznych dowiemy się w osobnej prezentacji.

Przypomnienie drugiego slajdu



Możemy chcieć zaznaczyć „jednokierunkowość” krawędzi.



Lub ich „długość”.

Takie grafy się przydają

- Drogi jednokierunkowe (w miastach, w obwodach elektrycznych, w wodociągach).
- Drogi z czasami przejazdu.
- Kroki procedury z kosztem wykonania.
- Łącza z przepustowościami.
- Siła oddziaływań międzycząsteczkowych.
- Wielkości przepływów ekonomicznych.
- Prawdopodobieństwo przejścia z jednego stanu do innego (np. łańcuchy Markowa w dynamice liniowej, wyszukiwarki internetowe).

A co z grafami z drugiego slajdu?

Grafy skierowane

Grafem skierowanym lub *digrafem* nazywamy parę $G = (V, E)$, gdzie:
1) V jest zbiorem *wierzchołków* (*węzłów*, *punktów*)
2) E jest multizbiorem krawędzi skierowanych (które mogą się powtarzać), czyli elementów $V \times V$.

Krawędzie skierowane na rysunkach grafów przedstawiamy jako strzałki, a krawędzie takiego grafu domyślnie zapisujemy jako pary uporządkowane np. (U, V). W tej sytuacji mówimy, że krawędź (U, V) wychodzi z wierzchołka U, a wchodzi do wierzchołka V. Jeśli w rysunku grafu skierowanego krawędź między wierzchołkami U i V nie ma zaznaczonej strzałki, oznacza to istnienie krawędzi skierowanych (U, V) i (V, U).

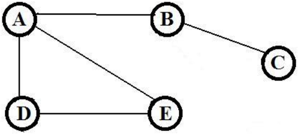
A co z grafami z drugiego slajdu?

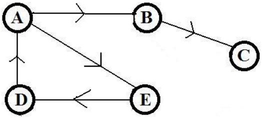
Grafy z wagami

Grafem z wagami nazywamy graf (skierowany lub nie), w którym każdej krawędzi e przypisana jest nieujemna liczba $W(e)$. *Wagą grafu* nazywamy sumę wag jego krawędzi.

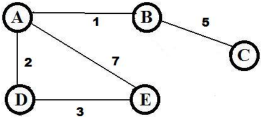
Graf z wagami może być skierowany lub nie. Wagi zazwyczaj zapisuje się jako liczby przy krawędziach.
Waga grafu z prawej strony drugiego slajdu wynosi 18.

Graf podstawowy





Graf podstawowy grafów po prawej.



Graf podstawowy

Grafem podstawowym grafu skierowanego lub z wagami nazywamy graf nieskierowany o tych samych wierzchołkach i krawędziach, przy czym w opisie krawędzi pomijamy ich kierunek i wagę.

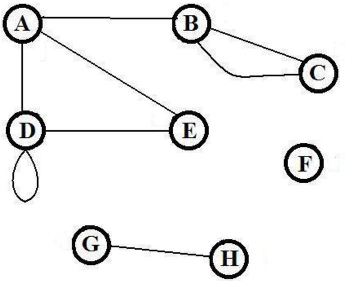
Przeniesienie pojęć na grafy skierowane i z wagami

Warto zauważyć, że w większości zagadnień można interpretować graf nieskierowany jako multigraf skierowany w którym każdą krawędź nieskierowaną UV zastępujemy dwiema krawędziami (U,V) i (V,U) skierowanymi w przeciwne strony.
Zazwyczaj nie będę pojęć zdefiniowanych dla grafów nieskierowanych przepisywał na potrzeby grafów skierowanych lub z wagami, a tylko będę wspominał, czy takie pojęcia się czymś różnią.
Sąsiedztwo wierzchołków i incydencja krawędzi z wierzchołkami w grafach skierowanych i z wagami są równoważne sąsiedztwu wierzchołków i incydencji krawędzi w ich grafie podstawowym. Z kolei izomorfizm grafów skierowanych wymaga zachowania kierunków krawędzi, a izomorfizm grafów z wagami wymaga zachowania wag.

Stopień - charakterystyka wierzchołka

Stopień wierzchołka

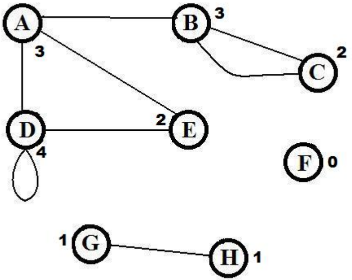
Stopniem wierzchołka v nazywamy liczbę deg v, oznaczającą liczbę krawędzi incydentnych z v (uwaga: w obliczaniu stopnia wierzchołka pętle liczymy jako dwie krawędzie incydentne).



Stopień - charakterystyka wierzchołka

Stopień wierzchołka

Stopniem wierzchołka v nazywamy liczbę $\deg v$, oznaczającą liczbę krawędzi incydentnych z v (uwaga: w obliczaniu stopnia wierzchołka pętle liczymy jako dwie krawędzie incydentne).

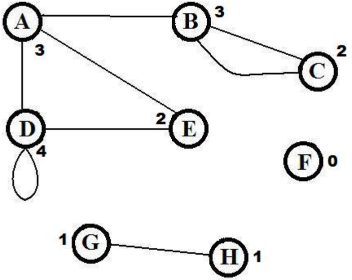


Przy każdym wierzchołku zapisano jego stopień: na przykład $\deg A = 3$. Zauważmy, że $\deg D = 4$, bo pętlę liczymy dwa razy.

Wierzchołki izolowane i końcowe

Wierzchołki izolowane i końcowe

Jeśli $\deg v = 0$, to v nazywamy wierzchołkiem izolowanym, a jeśli $\deg v = 1$ to v nazywamy wierzchołkiem końcowym.



Wierzchołek F jest izolowany, a G i H są wierzchołkami końcowymi.

Stopień maksymalny i minimalny grafu

Stopień maksymalny i minimalny grafu

Maksymalnym stopniem grafu G nazywamy liczbę $\Delta(G)$ - największy możliwy stopień wierzchołka w grafie, czyli:

$$\Delta(G) = \max\{\deg v : v \in V(G)\}.$$

Minimalnym stopniem grafu G nazywamy liczbę $\delta(G)$ - najmniejszy możliwy stopień wierzchołka w grafie, czyli:

$$\delta(G) = \min\{\deg v : v \in V(G)\}.$$

Graf regularny

Graf n-regularny

Jeśli w grafie G zachodzi

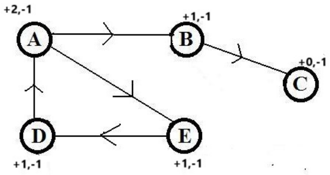
$$\Delta(G) = \delta(G) = n$$

(czyli wszystkie wierzchołki są stopnia n) to graf G nazywamy *n-regularnym*.
Grafy n-regularne dla dowolnego n nazywa się po prostu *regularnymi*.
Inna nazwa grafów 3-regularnych to grafy *kubiczne*.

Stopnie wierzchołków w grafie skierowanym

Stopień wierzchołka

Stopniem wyjściowym v nazywamy liczbę $\deg^+ v$, oznaczającą liczbę krawędzi wychodzących z v. *Stopniem wejściowym v* nazywamy liczbę $\deg^- v$, oznaczającą liczbę krawędzi wchodzących do v. Generalnie, $\deg^+ v + \deg^- v = \deg v$.



Przy każdym wierzchołku zapisano jego stopnie: z plusem wyjściowy, z minusem wejściowy. Na przykład $\deg^+ A = 2, \ \deg^- A = 1$.

Lemat o uściskach dłoni

Lemat o uściskach dłoni

Jeśli $G = (V, E)$ jest grafem ogólnym, to:

$$\sum_{v \in V} \deg v = 2|E|,$$

gdzie $|E|$ oznacza liczbę elementów zbioru E (w tym wypadku, liczbę krawędzi grafu). Zatem liczba wierzchołków stopnia nieparzystego jest parzysta.

Z tego twierdzenia wynika, że niezależnie ile dłoni mają wszystkie gatunki wszechświata i ile z nich wymienia między sobą uściski dłoni, to jeśli zsumujemy uściski dłoni wykonane przez każdą osobę we wszechświecie, liczba ich zawsze będzie parzysta (wystarczy każdą osobę potraktować jako wierzchołek grafu, a każdy uścisk jako krawędź między wierzchołkami).

Lemat o uściskach dłoni dla grafów skierowanych

Lemat o uściskach dłoni dla grafów skierowanych

Dla grafu skierowanego $G = (V, E)$ zachodzi:

$$\sum_{v \in V} \deg^+ v = \sum_{v \in V} \deg^- v = |E|.$$

Droga i jej długość

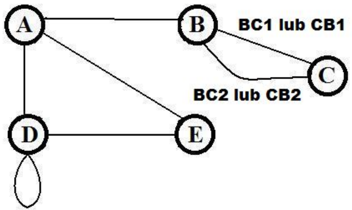
Droga

Droga w grafie G to skończony ciąg krawędzi postaci: $wv_1, v_1v_2, \ldots, v_ku$ (czyli drugi wierzchołek poprzedniej krawędzi musi być pierwszym następnej). Oznaczamy go $wv_1 \ldots v_ku$. Wierzchołek w nazywamy początkiem, a u - końcem drogi.
W wypadku grafu skierowanego droga jest zdefiniowana tak samo, ale kolejne krawędzie drogi muszą mieć kierunek zgodny z kierunkiem krawędzi w grafie.

Długość drogi

Długość drogi to liczba jej krawędzi.

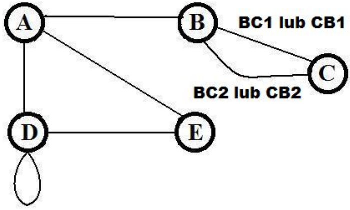
Drogi - przykłady



Na potrzeby przykładu rozróżniamy dwie krawędzie łączące wierzchołki B i C.

- Ciąg krawędzi AB, $BC1$, $CB1$, $BC2$, $CB1$ BA, AE jest drogą, podobnie jak AD, DD, DE, ED.
- W skrócie można te drogi zapisać odpowiednio: $ABCBCBAE$ (choć tracimy tu informację o tym, jakimi krawędziami poruszaliśmy się między B i C) oraz $ADDED$
- Długości tych dróg to odpowiednio 7 i 4.

Drogi - przykłady



Na potrzeby przykładu rozróżniamy dwie krawędzie łączące wierzchołki B i C.

Ciąg krawędzi AB, DA, AE nie jest drogą, bo druga krawędź nie zaczyna się tam, gdzie kończy pierwsza.

Własności dróg

Droga zamknięta

Droga zamknięta to droga dla której $w = u$, czyli wierzchołek początkowy jest też wierzchołkiem końcowym.

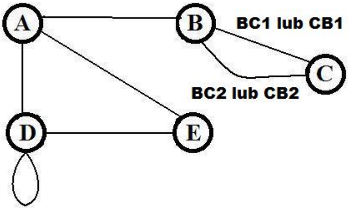
Droga prosta

Droga prosta, to droga, której wszystkie krawędzie są różne (nie można nawet przejść jedną krawędzią w przeciwne strony).

Cykl

Cykl to droga prosta zamknięta, w której jedynym powtarzającym się wierzchołkiem jest jej początek (i jednocześnie koniec).

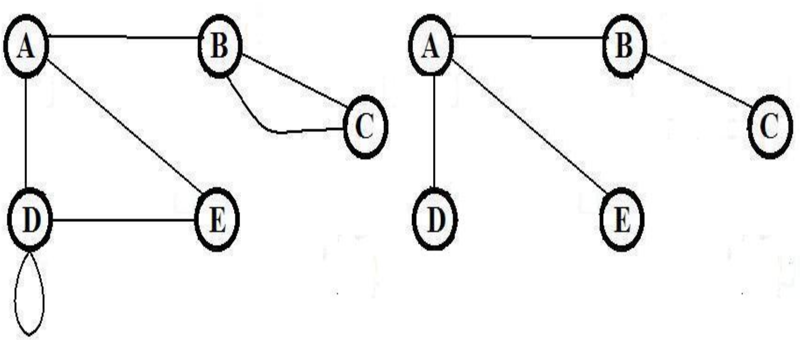
Drogi - własności



Na potrzeby przykładu rozróżniamy dwie krawędzie łączące wierzchołki B i C.

- Ciąg krawędzi ED, DD, DE jest drogą zamkniętą, ale nie drogą prostą ani cyklem.
- Ciąg krawędzi AD, DD, DE, EA jest drogą prostą i zamkniętą ale nie cyklem (D się powtarza).
- Ciągi krawędzi (EA, AD, DE) i $(BC1, CB2)$ są cyklami.

Graf acykliczny



Graf po prawej jest acykliczny, graf po lewej nie.

Graf acykliczny

Graf acykliczny to graf, który nie zawiera cykli.

Spójność - definicje

Graf spójny

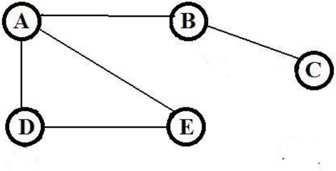
Graf spójny to graf, w którym między dowolnymi dwoma wierzchołkami istnieje droga. Jeśli graf nie jest spójny, to nazywamy go *niespójnym*.

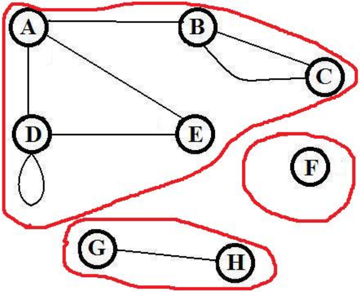
Uwaga! Graf spójny o $|V|$ wierzchołkach musi mieć przynajmniej $|V|-1$ krawędzi.

Składowe spójne

Każdy graf można podzielić na maksymalne (w sensie zawierania) spójne podgrafy, zwane *składowymi spójnymi*.

Spójność, składowe spójne





Graf po lewej jest spójny, graf po prawej ma 3 (zaznaczone) składowe spójne.

Rozspójnianie - definicje

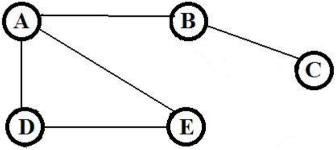
Most

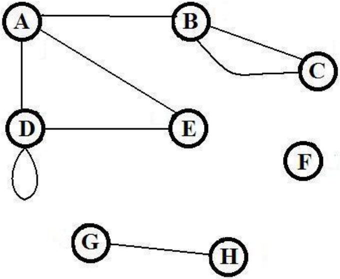
Most to taka krawędź grafu, po której usunięciu liczba składowych spójnych zwiększa się o 1.

Wierzchołek rozspajający

Wierzchołkiem rozspajającym (punktem artykulacji, przegubem) w grafie G nazywamy wierzchołek, którego usunięcie, wraz z jego krawędziami incydentnymi, spowoduje wzrost liczby składowych spójnych (niekoniecznie o 1).

Mosty i przeguby





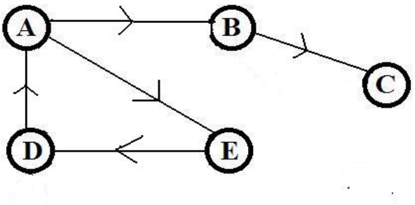
W grafie po lewej krawędzie AB i BC, a w grafie po prawej AB i GH są mostami: ich usunięcie spowoduje „rozspójnienie" grafu. Wierzchołkami rozspajającymi są w obydwu grafach są jedynie A i B.

Grafy spójne i niespójne - przykłady zastosowań

Warto zdać sobie sprawę, że znaczna część problemów, do których stosowana jest teoria grafów generuje grafy niespójne (aczkolwiek zazwyczaj najciekawsze rzeczy dzieją się na największej składowej spójnej i często do niej ogranicza się badania, czy działanie algorytmu).

- Sieć i komputery do niej niepodłączone
- Sieci społeczne i samotnicy lub izolowane społeczności
- Niepodłączone elementy układów elektrycznych
- Niewykorzystywane zasoby lub metody w algorytmie rozwiązywania jakiegoś problemu.

Uwaga - spójność i grafy skierowane



Definiowanie spójności dla grafów skierowanych jest bardziej skomplikowane. Na przykład z wierzchołka A istnieje droga do C, ale nie ma drogi powrotnej. Istnieją precyzyjne definicje różnych rodzajów spójności dla grafów skierowanych, jednak na potrzeby naszego wykładu uznajemy, że graf skierowany jest spójny wtedy i tylko wtedy gdy spójny jest jego graf podstawowy. W tym sensie graf powyższy jest spójny.

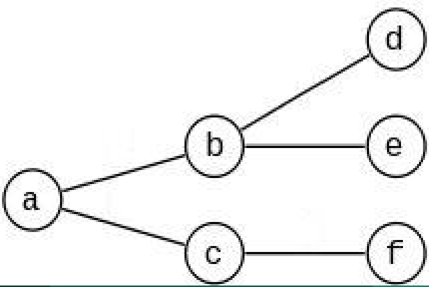
Lasy i drzewa

Las

Las to graf prosty, acykliczny.

Drzewo

Drzewo to graf prosty, spójny, acykliczny (czyli spójny las). Wierzchołki drzewa nazywamy *węzłami*. Podgraf spójny drzewa nazywamy *poddrzewem*.



Antyklika i klika

Antyklika

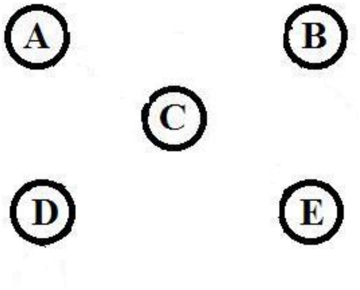
Graf pusty (*antyklika, graf niezależny*) to graf bez krawędzi. Antyklikę o n wierzchołkach oznacza się przez A_n.

Klika

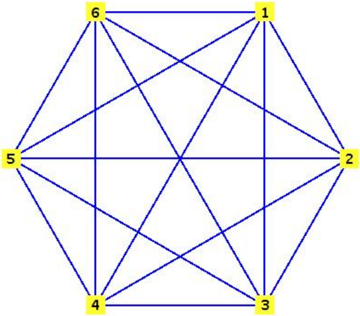
Graf pełny (*klika*) to graf prosty, w którym każde dwa wierzchołki są połączone dokładnie jedną krawędzią. Klikę o n wierzchołkach oznacza się przez K_n.

Korzystając z wiadomości z kombinatoryki, łatwo obliczyć, ile krawędzi ma klika o danej liczbie wierzchołków...

Klika i antyklika



5-antyklika (A_5).



6-klika (K_6)

Graf-droga i graf-cykl

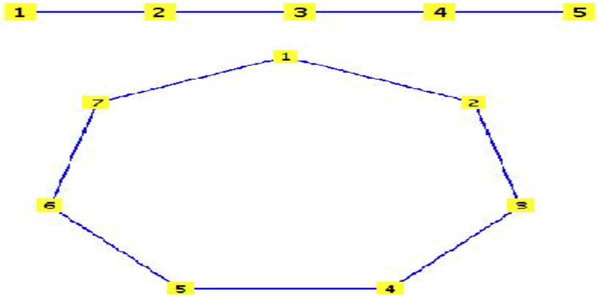
Graf-droga

Graf-droga to graf złożony tylko z krawędzi $v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{n-1}v_n$ (czyli drugi wierzchołek poprzedniej krawędzi musi być pierwszym następnej), gdzie wszystkie wierzchołki v_i są różne.

Graf-cykl

Graf-cykl to graf złożony tylko z krawędzi $v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{n-1}v_n, v_nv_1$ (czyli drugi wierzchołek poprzedniej krawędzi musi być pierwszym następnej), gdzie wszystkie wierzchołki v_i są różne, z wyjątkiem pierwszego i ostatniego.

Graf-droga i graf-cykl

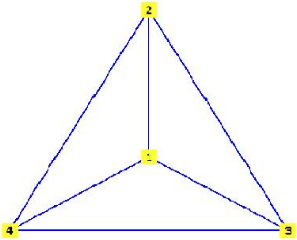


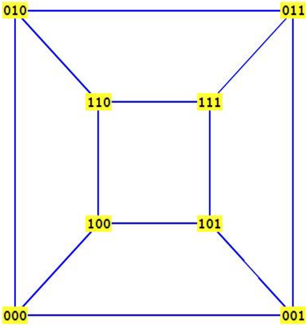
Na górze graf-droga o 5 wierzchołkach, na dole graf-cykl o 7 wierzchołkach.

Grafy platońskie

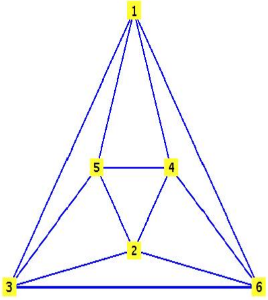
Graf platoński

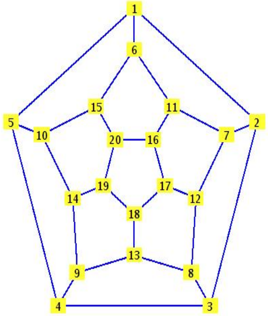
Graf platoński to graf złożony z wierzchołków i krawędzi wielościanu foremnego. Jest pięć takich grafów (jak i pięć wielościanów foremnych): czworościan, sześcian, ośmiościan, dwunastościan i dwudziestościan. Wszystkie są grafami regularnymi.

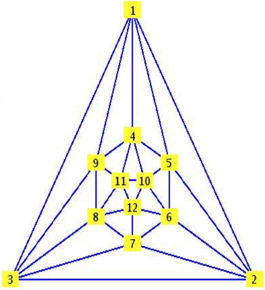




Grafy platońskie







Na poprzednim slajdzie - zrzutowane na płaszczyznę grafy czworościonu i sześcianu, na tym grafy ośmiościanu, dwunastościanu i dwudziestościanu.

Graf Petersena

Grafem o ciekawych własnościach, o których w przyszłości się przekonamy, jest graf Petersena (na przykład, jest to graf kubiczny):