0a. Ciągi liczbowe (i nie tylko): podstawy i granice

Grzegorz Kosiorowski

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

Wstęp

Ciągi liczbowe są funkcjami o dyskretnej dziedzinie, acz technicznie mogą przyjmować dowolne wartości rzeczywiste.
Tak naprawdę, ciągi nie muszą być ciągami liczbowymi, ich wartościami może być cokolwiek (np. ciąg wyników kolejnych kroków jakiegoś algorytmu będzie się tu bardzo często pojawiać) - wrócimy do tego pod koniec prezentacji.

Ciąg liczbowy

Ciąg liczbowy

Ciągiem liczbowym nazywamy funkcję o wartościach w zbiorze liczb rzeczywistych, której dziedziną jest $\mathbb{N}$ (a przynajmniej nieskończony podzbiór $\mathbb{N}$).

Ciąg liczbowy skończony

Ciągiem liczbowym skończonym nazywamy funkcję o wartościach w zbiorze liczb rzeczywistych, której dziedziną jest skończony podzbiór $\mathbb{N}$.

Argumenty takiej funkcji nazywa się *indeksami ciągu*, a wartości - *wyrazami ciągu*. Często stosuje się zapis indeksu dolnego zamiast nawiasu funkcyjnego tj. jeśli a jest ciągiem to zamiast $a(n)$ piszemy a_n.

Ciąg liczbowy - uwagi

W szkole definiowane były ciągi: arytmetyczny (o zadanej różnicy) i geometryczny (o zadanym ilorazie) - nie będę powtarzał definicji, ale proszę sobie je przypomnieć.
Obliczanie granicy dowolnego ciągu w punkcie nie ma sensu, gdyż albo ciąg nie jest określony w otoczeniu tego punktu, albo przyjmuje tam wartość, która naturalnie jest jego granicą w tym punkcie (jako jedyna wartość w otoczeniu). Jedynym nietrywialnym przypadkiem jest granica w nieskończoności.
Można ją definiować tak jak dla innych funkcji lub przez szczególną definicję dla ciągu z następnego slajdu (obie definicje są równoważne).

Granica ciągu liczbowego

Granica ciągu

Granicą ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest liczba $g \in \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n>n_0}\ |a_n - g| < \varepsilon.$$

Granicą ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest $+\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{M\in\mathbb{R}}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n>n_0}\ a_n > M.$$

Granicą ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest $-\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{M\in\mathbb{R}}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n>n_0}\ a_n < M.$$

Granica ciągu liczbowego - uwagi

O ciągu, który posiada granicę będącą liczbą rzeczywistą mówimy, że jest *zbieżny*. W innym wypadku jest *rozbieżny*.
Po co alternatywna definicja dla samego ciągu, skoro ciąg jest funkcją a granica funkcji już była zdefiniowana na kursie w pierwszym semestrze? Otóż czasem dzięki niej łatwiej jest udowodnić nieistnienie granicy odpowiedniej funkcji.

Twierdzenie Heinego

Zależność pomiędzy granicami ciągów oraz funkcji opisuje poniższe twierdzenie:

Twierdzenie Heinego

Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona w pewnym otoczeniu tego punktu (z możliwym wyjątkiem punktu x_0). $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g$ wtedy i tylko wtedy gdy

$$\forall_{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}} \left\{ \left(\forall_{n\in\mathbb{N}}\, x_n \in D_f \wedge \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g \right\}.$$

Twierdzenie to mówi, że w pewnym sensie badanie granic funkcji można sprowadzić do badania granic ciągów i odwrotnie.

Twierdzenie Heinego - granice w nieskończonościach

Twierdzenie Heinego

Jeśli funkcja f będzie określona w pewnym przedziale $(M, +\infty)$, $M \in \mathbb{R}$, to $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = g$ wtedy i tylko wtedy gdy:

$$\forall_{(x_n)_{n \in \mathbb{N}}} \left\{ \left(\forall_{n \in \mathbb{N}}\, x_n \in D_f \wedge \lim_{n \to \infty} x_n = +\infty \right) \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = g \right\}.$$

Jeśli funkcja f będzie określona w pewnym przedziale $(-\infty, M)$, $M \in \mathbb{R}$, to $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = g$ wtedy i tylko wtedy gdy:

$$\forall_{(x_n)_{n \in \mathbb{N}}} \left\{ \left(\forall_{n \in \mathbb{N}}\, x_n \in D_f \wedge \lim_{n \to \infty} x_n = -\infty \right) \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = g \right\}.$$

Twierdzenie Heinego - przykład

Zadanie

Udowodnić, że $\lim_{x \to \infty} \sin x$ nie istnieje.

Zadanie to staje się łatwiejsze właśnie dzięki twierdzeniu Heinego. Wystarczy bowiem wskazać 2 ciągi (a_n) i (b_n), których granicą jest $+\infty$, takie, że $\lim_{n \to \infty} \sin a_n \neq \lim_{n \to \infty} \sin b_n$. Rozważmy $a_n = n\pi$ - niewątpliwie dąży do nieskończoności. Natomiast $\lim_{n \to \infty} \sin a_n = \lim_{n \to \infty} 0 = 0$. Z kolei, jeśli $b_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$, to b_n zmierza do nieskończoności, a $\lim_{n \to \infty} \sin b_n = \lim_{n \to \infty} 1 = 1$. Jako, że $0 \neq 1$, to $\lim_{x \to \infty} \sin x$ nie istnieje.

Twierdzenie Heinego - wniosek

W szczególności, twierdzenie Heinego mówi, że nie są nam potrzebne specjalne techniki obliczania granic ciągów - wystarczy, że użyjemy tych, które znamy dla funkcji zmiennych ciągłych.

Wniosek

Załóżmy, że $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem, a f jest funkcją o dziedzinie rzeczywistej, taką, że $f(n) = a_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Jeśli $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = g$ to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$.

Potocznie, do wzoru na n-ty wyraz ciągu zamiast n możemy podstawić liczbę rzeczywistą x i badać zbieżność tak powstałej funkcji $f(x)$ przy x zmierzającym do $+\infty$ (oczywiście, zmiana nazwy zmiennej na nic nie wpływa, po prostu zmienną n kojarzymy z liczbami naturalnymi, więc tak jest bezpiecznej). Jeśli granica ta istnieje, to granica ciągu jest taka sama.

Twierdzenie Heinego - przykład

Przejście z ciągów na funkcje umożliwia nam korzystanie z wielu narzędzi niedostępnych w przypadku dyskretnym np. z twierdzenia de L'Hospitala.

Przykład

Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}$.

Z twierdzenia Heinego $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$, gdzie $x \in \mathbb{R}$, o ile ta druga granica istnieje. Zatem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Wniosek z twierdzenia Heinego - kontrprzykład

Wniosek

Załóżmy, że $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem, a f jest funkcją o dziedzinie rzeczywistej, taką, że $f(n) = a_n$ dla każdego $n \in \mathbb{R}$. Jeśli $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = g$ to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$.

Na koniec, zauważmy jeszcze, że powyższy wniosek jest tylko implikacją, nie równoważnością. Z faktu, że granica pojedynczego ciągu istnieje, nie wynika istnienie granicy funkcji. Na przykład, jeśli rozważymy ciąg $a_n = \sin(n\pi)$, to łatwo zauważyć, że wszystkie jego wyrazy są równe 0. Tymczasem $\lim\limits_{x\to\infty} \sin(x\pi)$ nie istnieje.

Ciągi nieliczbowe

Ciąg

Ciągiem nazywamy funkcję, której dziedziną jest podzbiór $\mathbb{N}$. Jeśli dziedzina ma skończenie wiele elementów, ciąg nazywamy skończonym.

Jak widać, ogólnie ciąg nie musi być ciągiem liczbowym: może to być ciąg liter (lub innych symboli) jak również całych słów, fragmentów grafu, funkcji itp. W szczególności, w informatyce często ciąg skończony (zwłaszcza danych) określa się mianem listy (*list*), a potencjalnie nieskończony ciąg danych nazywa się strumieniem danych (*stream*). Z kolei ciąg znaków jakiegoś języka (np. liter i liczb języka polskiego) określa się nazwą łańcucha (*string*).