Teoria grafów - zestaw 1

Podstawowe informacje o grafach

Zadanie 1. Za pomocą teorii grafów omówić klasyczną zagadkę:
Gospodarz szedł na targ sprzedać kapustę i kozę. Dla ochrony zabrał ze sobą oswojonego wilka. By dotrzeć na targ, musiał przekroczyć rzekę łódką. Niestety, miał tak małą łódkę, że mógł się w niej zmieścić tylko gospodarz i najwyżej jeden z obiektów: kapusta, koza, wilk. Ponadto, gospodarz musiał być w łódce, by ta mogła przekroczyć rzekę. Jeśli w jakimś momencie na tym samym brzegu rzeki będą koza i kapusta, a nie będzie gospodarza, koza zje kapustę. Jeśli koza z wilkiem będzie na tym samym brzegu bez gospodarza, to wilk zje kozę. W jaki sposób gospodarz może bezpiecznie znaleźć się wraz z kapustą, kozą i wilkiem na drugim brzegu rzeki?
Kroki postępowania:
I. Wszystkie możliwe ustawienia gospodarza, kapusty, kozy i wilka zapisać jako 4-elementowe ciągi liter L i P, gdzie L oznacza, że dany obiekt jest na lewym brzegu rzeki (powiedzmy, że stamtąd startują), a P oznacza, że dany obiekt jest na prawym brzegu rzeki (tam wszyscy mają się znaleźć). Na przykład LLPP opisuje sytuację, w której gospodarz i kapusta są na lewym brzegu rzeki, a koza na prawym. Ile jest takich sytuacji?
II. W naszym grafie wierzchołkami będą „legalne” sytuacje, czyli te, które są dopuszczone przez warunki zadania. Na przykład wspomniane LLPP jest „nielegalne” bo wilk i koza są na tym samym brzegu bez gospodarza. Ile jest takich wierzchołków?
III. Tworzymy krawędzie między wierzchołkami, między którymi można przejść za pomocą jednego przepłynięcia rzeki. Są to wierzchołki, które różnią się pierwszą literą (bo gospodarz zawsze przepływa) i co najwyżej jedną inną (bo tylko jeden obiekt może wziąć). Ile ten graf ma krawędzi?
IV. Podać wszystkie drogi proste prowadzące z wierzchołka LLLL do PPPP - są to najefektywniejsze rozwiązania zadania. Jaka jest ich długość?
Zadanie 2. Dla grafu z pierwszego zadania, odpowiedzieć na poniższe pytania i zastanowić się nad tym, jakie interpretacje mają te pytania i odpowiedzi:
a) Czy ten graf jest skierowany, czy nieskierowany?
b) Czy ten graf jest prosty?
c) Jaki jest stopień każdego wierzchołka tego grafu? Czy ma wierzchołki izolowane i końcowe? Jaki jest stopień maksymalny i minimalny tego grafu? Czy ten graf jest regularny?
d) Sprawdzić lemat o uściskach dłoni dla tego grafu.
e) Co w tym grafie oznacza droga, która nie jest prosta? Dlaczego rozważaliśmy w poprzednim zadaniu drogi proste jako najefektywniejsze rozwiązania zadania?
f) Czy ten graf posiada cykl? Wskazać ten cykl, jeśli istnieje.
g) Czy ten graf jest drzewem?
h) Ile ten graf ma składowych spójnych?
i) Wskazać mosty i wierzchołki rozspajające tego grafu.
Zadanie 3. Graf o 21 krawędziach ma 7 wierzchołków stopnia 1, 3 wierzchołki stopnia 2, 7 wierzchołków stopnia 3, a pozostałe wierzchołki stopnia 4. Ile ten graf ma wierzchołków? (wskazówka - lemat o uściskach dłoni)
Zadanie 4. Narysować lub ustalić, że nie istnieje graf o sześciu wierzchołkach, które mają odpowiednio stopnie:
a) $(5, 5, 5, 5, 3, 3)$; b) $(5, 4, 3, 2, 2, 1)$.
Czy możliwe jest, żeby taki graf był prosty?
Zadanie 5. Węże zjadają żaby, a ptaki zjadają pająki. Ptaki i pająki zjadają owady. Żaby jedzą ślimaki, pająki i owady. Narysować graf skierowany reprezentujący te zależności. Następnie odpowiedzieć na pytania:
a) Dla każdego wierzchołka wyznacz jego stopień wchodzący i wychodzący. Sprawdzić lemat o uściskach dłoni dla tego grafu.

b) Czy ten graf jest acykliczny? A jego graf podstawowy? Jeśli nie, podać przykładowy cykl.
c) Czy graf podstawowy tego grafu jest drzewem?
d) Czy ten graf jest spójny?
Zadanie 6. Dowolnie zetykietować krawędzie grafu z zadania 5 i wypisać dla niego macierze incydencji i sąsiedztwa.
Zadanie 7. Narysować graf $G = (V, E)$, w którym $V = \{A, B, C, D\}$, $E = \{\{A, B\}, \{B, C\}, \{C, D\}, \{A, C\}, \{B, D\}\}$. Zapisać macierze incydencji, sąsiedztwa i Laplace'a tego grafu.
Zadanie 8. Poniższa macierz jest macierzą incydencji grafu nieskierowanego G.

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Odczytać z niej (bez rysowania grafu) następujące informacje:
a) Liczba wierzchołków i krawędzi.
b) Stopień każdego wierzchołka, stopień maksymalny grafu.
c) Liczba pętli i krawędzi wielokrotnych grafu.
Następnie narysować graf G (wierzchołki i krawędzie zetykietować alfabetycznie). Wskazać mosty i wierzchołki rozspajające tego grafu.
Zadanie 9. Poniższa macierz jest macierzą sąsiedztwa grafu nieskierowanego H. Odczytać z niej (bez rysowania grafu) następujące informacje:

$$B(H) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

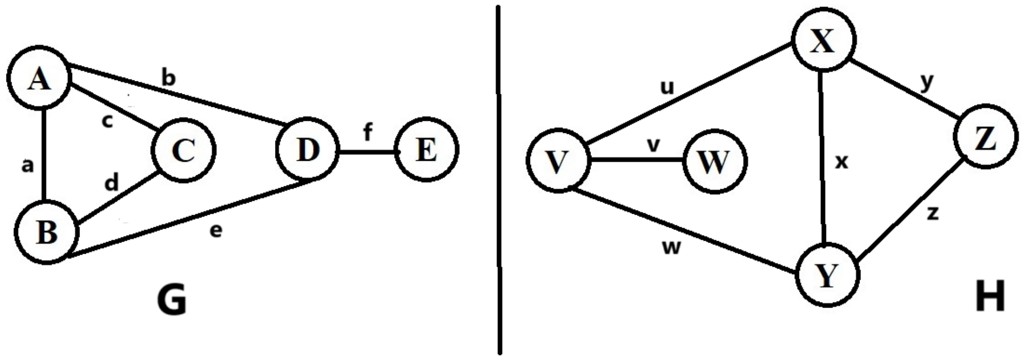
a) Liczba wierzchołków.
b) Ile wynosi stopień każdego wierzchołka? Ile wobec tego jest krawędzi w grafie?
c) Liczba pętli i krawędzi wielokrotnych grafu.
Następnie narysować graf H (wierzchołki i krawędzie zetykietować alfabetycznie). Wskazać mosty i wierzchołki rozspajające tego grafu.
Zadanie 10. Poniższa macierz jest macierzą sąsiedztwa grafu skierowanego K.

$$B(K) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

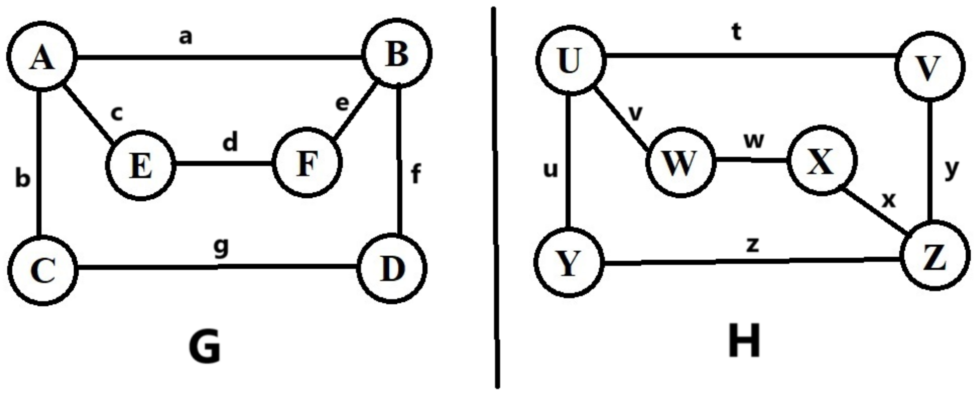
Odczytać z niej (bez rysowania grafu) następujące informacje:
a) Liczba wierzchołków.
b) Ile wynosi stopień wejściowy i wyjściowy każdego wierzchołka? Ile wobec tego jest krawędzi w grafie?
c) Liczba pętli i krawędzi wielokrotnych grafu.
Następnie narysować graf K (wierzchołki i krawędzie zetykietować alfabetycznie) i wypisać w postaci listy funkcję φ jego krawędzi.

Zadanie 11. Dla poniższych par grafów wypisać macierze incydencji i zbadać, czy są to grafy izomorficzne (za pomocą tych macierzy lub nie). Podać izomorfizm grafów lub uzasadnić, dlaczego izomorfizm między nimi nie istnieje.

a)



b)



Zadanie 12. Które pary grafów przedstawionych na rysunku poniżej są izomorficzne, jeśli w ogóle takie istnieją? Uzasadnić odpowiedź opisując izomorfizm lub wyjaśniając, dlaczego taki nie istnieje.