

## Zasady egzaminu z matematyki dyskretnej

---

Podstawowe zasady:

1. By przystąpić do egzaminu należy zdobyć zaliczenie ćwiczeń. Informacje o tym jak to zrobić przekaże osoba prowadząca ćwiczenia. Z ćwiczeń można zdobyć od 0 do 40 punktów „kursowych” do wyniku końcowego, Brak zaliczenia (przy byciu sklasyfikowanym - warunki klasyfikacji określa osoba prowadząca ćwiczenia) oznacza konieczność pisania zaliczenia poprawkowego i w wypadku zdobycia zaliczenia poprawkowego - możliwość pisania egzaminu w II terminie.

2. Egzamin się będzie składać z 4-6 zadań podobnych do rozwiązywanych na ćwiczeniach (przykłady poniżej) oraz jednego zadania teoretycznego - pytania z wykładu (przykłady poniżej, jakiś czas przed egzaminem przedstawię listę około 25 pytań, z których jedno będzie na egzaminie). Dla mojej wygody egzamin będzie oceniany w skali 0-1200 „małych punktów” ale do kursu te „małe punkty” pochodzą po podzieleniu przez 20, więc z egzaminu można zdobyć 60 punktów „kursowych”.

Żeby zaliczyć kurs trzeba spełnić 3 warunki:

- a) zaliczyć ćwiczenia;
- b) zdobyć co najmniej 50 punktów „kursowych” w sumie z ćwiczeń i egzaminu;
- c) zdobyć co najmniej 20 punktów „kursowych” z egzaminu.

Każde dodatkowe 10 punktów powyżej 50 oznacza podniesienie oceny o 0.5 (czyli na 3.5 potrzebne jest 60 punktów, na 4.0 - 70 i tak dalej).

Na egzaminie można mieć ze sobą proste kalkulatory („czterodziałaniówki”), zegarek analogowy i przybory do pisania. Nie wolno mieć przy sobie (pod groźbą automatycznego obłania kursu) żadnych rzeczy pozwalających na kontakt ze światem zewnętrznym (np. smartfony, komórki, smartwatche itp.), nie mówiąc o wszelkiego rodzaju ściągach.

---

### Zadania:

Jak Państwo widzą, zadania te sumują się do więcej niż 1200 punktów, więc na pojedynczym egzaminie będą tylko niektóre z nich. Na pewno zawsze będzie zadanie 8.

1. (100-200 punktów) Zadanie z logiki typu: zdanie potoczne przekształcić na wyrażenie logiczne i sprawdzić wartość logiczną tego wyrażenia za pomocą tabelki logicznej. [przykład: prezentacja 1a, slajdy 23-31]

2. (100 punktów): Wyznaczyć wzór funkcji odwrotnej do danej [prezentacja 2, slajd 29 - choć raczej na egzaminie coś bardziej skomplikowanego, z potęgą albo logarytmem]

3. (100-200 punktów) Uporządkować 3 ciągi według notacji O i udowodnić prawidłowość uporządkowania, obliczając odpowiednie granice (np.  $a_n = n^2 + n + 1$ ,  $b_n = n \log n$ ,  $c_n = 2^n - n$ ) [Prezentacja 3b, slajdy 16-17, 21-23]

4. (200-400 punktów) 1 lub 2 zadania z teorii liczb i kryptografii. Na przykład:

Rozszerzony algorytm Euklidesa [Prezentacja 4, slajdy 17-36] Rozwiązywanie układów kongruencji liniowych [Prezentacja 4, slajdy 60-64] Wyznaczanie wartości funkcji  $\varphi$  Eulera [Prezentacja 4, slajdy 86-87] Modularne podnoszenie liczb do wysokich potęg z wykorzystaniem Twierdzenia Eulera [Prezentacja 4, slajd 90] Zadania kryptograficzne z szyfrowania RSA typu: Wskazać spośród par: (77, 21), (165, 41), (91, 17) tę, która może być kluczem publicznym w systemie RSA i uzasadnić, dlaczego pozostałe dwie nie mogą. Dla poprawnej pary wyznaczyć klucz prywatny, a następnie obliczyć, jaka jednostka tekstu jawnego zostanie odszyfrowana z jednostki szyfrogramu o numerze 6, jaka jednostka szyfrogramu powstanie z jednostki tekstu jawnego o numerze 10. [Prezentacja 5, slajdy 24-32].

5. (200-300 punktów) Rozwiązanie rekurencji liniowej niejednorodnej [Prezentacja 6c, slajdy 23-25]

6. (200-300 punktów) 2-3 krótkie zadania z kombinatoryki, w których wystarczy podać odpowiedź z krótkim uzasadnieniem [Prezentacja 7a: slajdy 8, 11-12, 17-19, 21, Prezentacja 7b: slajdy 5-10, 18, 22-25, 35-40, Prezentacja 7c: slajdy 4-5,8-10] (poniższy przykład z wcześniejszego egzaminu ma 4 podpunkty, więc tak naprawdę będzie mniej)

Komitet Wsparcia Matematyki Dyskretnej organizuje demonstrację przeciw rządzącej partii Po-chodna i Całka.

- a) Organizatorzy mają przygotowane 50 haseł do skandowania i 20 do wypisania na transparentach. Chcą wybrać 15 haseł do skandowania i ustalić ich kolejność podczas demonstracji (skandowane hasła nie mogą się powtarzać) oraz wybrać 7 transparentów do ustawienia w tle (dokładne ustawienie tych transparentów nie ma znaczenia, ale hasła na nich mają być

różne). Ile zestawów złożonych z ciągu haseł skandowanych i zbioru haseł na transparentach mogą rozważać?

- b) Podczas demonstracji ma przemawiać 31 osób z 6 frakcji: antycałkowców, antyróżniczkowców, kombinatoryków, teorioliczbowców, teoriografistów i rekurencjonistów. Na ile sposobów można rozdzielić przemówienia pomiędzy te frakcje, jeśli zakładamy, że kolejność przemówień nie ma znaczenia, ale każda frakcja ma mieć przydzielone co najmniej 1 przemówienie, zaś najsilniejsze frakcje: kombinatoryków i rekurencjonistów muszą mieć przydzielone co najmniej po 3 przemówienia?
- c) 22 członków Komitetu postanowiło wybrać spośród siebie 3-osobową komisję ds. przygotowywania ulotek, 6-osobową komisję ds. zapewnienia bezpieczeństwa demonstracji i 4-osobową komisję ds. kontaktów z mediami. Na ile sposobów mogą to zrobić, jeśli założymy, że nikt nie może zasiadać w dwu takich komisjach jednocześnie?
- d) Władze miejskie wyraziły zgodę na demonstrację, o ile każdemu jej uczestnikowi zostanie przypisany 4-cyfrowy numer. Numery te muszą tworzyć liczby większe lub równe 1000 (czyli pierwsza cyfra nie może być zerem), które nie mogą być podzielne przez 9, przez 12, ani przez 21. Ilu uczestników może mieć demonstracja, jeśli organizatorzy chcą przestrzegać tego zalecenia?

7. (200 punktów) Algorytm z teorii grafów: Zbadać, który z grafów na rysunku ma drogę lub cykl Eulera i wyznaczyć tę drogę lub cykl na podstawie algorytmu Fleury'ego, którego przebieg należy przedstawić za pomocą tabelki [Prezentacja 8b, slajdy 8, 14-29] Wyznaczyć minimalną drogę i jej wagę w grafie skierowanym za pomocą algorytmu Dijkstry, którego przebieg należy przedstawić za pomocą tabelki [Prezentacja 8c, slajdy 24-39].

8. (100 punktów) Zadanie teoretyczne - przynajmniej 2 tygodnie przed egzaminem powstanie lista około 25 pytań, z których Państwu wybiorę pytanie na egzamin. Przykładowe pytania:

- a) Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych.
- b) Wyjaśnić, co to jest algorytm rekurencyjny i wskazać przykład takiego algorytmu spośród przerobionych na wykładzie.
- c) Narysować po jednym przykładzie grafu prostego i spójnego o 5-7 wierzchołkach i 5-12 krawędziach spełniającym następujące warunki lub uzasadnić dlaczego taki graf nie istnieje:
  - I. Graf hamiltonowski, który jest drzewem;
  - II. Graf hamiltonowski, który nie jest eulerowski;
  - III. Graf eulerowski, który nie jest hamiltonowski;
  - IV. Graf eulerowski, który posiada wierzchołek rozspajający.