7a. Kombinatoryka: prawo sumy i różnicy, zliczanie wielokrotności, wzór włączeń i wyłączeń

Grzegorz Kosiorowski

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

Motywacja

Problem, którym zajmuje się kombinatoryka (przynajmniej na poziomie tego wykładu) to: jak policzyć elementy dużych (ale skończonych) zbiorów bez użycia brutalnej siły i wypisania wszystkich elementów.

Przykład. Liczba wszystkich sposobów ułożenia kart w 52-kartowej talii to około 10^{68}. To jest zdecydowanie większa liczba, niż liczba atomów, z których się składa Ziemia. Takiej listy ułożeń nie są w stanie przechowywać nawet największe komputery. A jednak, planując zasady jakiejś gry karcianej (np. pokera), musimy jakoś obliczyć prawdopodobieństwa powstania różnych układów, do czego teoretycznie takiej wielkości liczby są potrzebne.

Należy przypomnieć sobie definicję prawdopodobieństwa dyskretnego.

Moc zbioru

Moc zbioru

Mocą zbioru S nazywamy liczbę elementów tego zbioru. Oznaczamy ją $|S|$.

Na tym wykładzie zajmujemy się zbiorami o skończonej mocy (skończonymi), chyba, że wyraźnie jest napisane inaczej, więc definicja ta dla nas nie wymaga komentarzy.
Dla zbiorów nieskończonych kwestia mocy zbioru jest dużo bardziej skomplikowana.

Zliczanie wielokrotności

Pierwszy przykład wymaga połączenia wiedzy i umiejętności z zakresu kombinatoryki i teorii liczb.

Zadanie

Ile jest liczb naturalnych pięciocyfrowych, które są podzielne jednocześnie przez 9 i przez 12?

Najpierw musimy skorzystać z twierdzenia znanego z teorii liczb:

Twierdzenie

Dla dodatnich liczb a, b zachodzi:

$$a|c \text{ i } b|c \Leftrightarrow NWW(a, b)|c.$$

Zliczanie wielokrotności - przykład

Twierdzenie

Dla dodatnich liczb a, b zachodzi:

$$a|c \text{ i } b|c \Leftrightarrow NWW(a,b)|c.$$

W ten sposób sprowadzimy nasze zagadnienie do:

Zadanie

Ile jest liczb naturalnych pięciocyfrowych, które są podzielne przez $NWW(9,12) = 36$?

Cecha z liczby

By sformułować twierdzenie dające odpowiedź na tego typu pytania, potrzebujemy wpierw definicji:

Cecha (podłoga)

Niech $x \in \mathbb{R}$. *Cechą* (lub *podłogą*) z x nazywamy największą liczbę całkowitą nie większą niż x. Oznaczamy ją przez $[x]$.

Na przykład:
$[\pi] = 3$, $[\frac{19}{4}] = 4$, $[5] = 5$, $[-1,5] = -2$.

Zliczanie wielokrotności - ogólne twierdzenie

Tego typu zagadnienia można rozwiązać za pomocą następującego twierdzenia:

Twierdzenie o zliczaniu wielokrotności

Dla dodatniej liczby a istnieje dokładnie

$$\left[\frac{a}{c}\right]$$

liczb dodatnich, podzielnych przez dodatnią liczbę c i nie większych od a.
W szczególności, dla dodatnich liczb a, b, takich, że $a < b$ istnieje dokładnie

$$\left[\frac{b}{c}\right] - \left[\frac{a-1}{c}\right]$$

liczb podzielnych przez dodatnią liczbę c i zawartych w przedziale domkniętym $[a, b]$.

Zliczanie wielokrotności - przykład

Teraz możemy rozwiązać nasze zadanie.

Zadanie

Ile jest liczb naturalnych pięciocyfrowych, które są podzielne przez 36?

Liczby pięciocyfrowe to inaczej liczby naturalne z przedziału $[a, b] = [10000, 99999]$. Zatem, zgodnie z twierdzeniem o zliczaniu podzielności, poprawny wynik to:

$$\left[\frac{b}{c}\right] - \left[\frac{a-1}{c}\right] = \left[\frac{99999}{36}\right] - \left[\frac{9999}{36}\right] = 2777 - 277 = 2500.$$

Prawo sumy

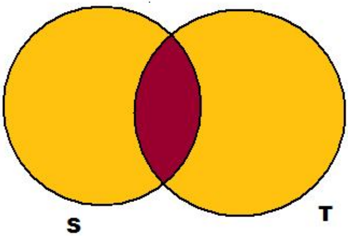
Prawo sumy

Niech S i T będą zbiorami skończonymi. Wtedy

$$|S \cup T| = |S| + |T| - |S \cap T|.$$

W szczególności, jeśli S i T są rozłączne, to $|S \cup T| = |S| + |T|$.

Prawo sumy - objaśnienie



Aby obliczyć liczbę elementów na zakolorowanym obszarze, trzeba policzyć każdy element $S \cup T$ dokładnie raz. Gdybyśmy liczyli $|S| + |T|$, to faktycznie policzylibyśmy po raz elementy z pomarańczowego obszaru, ale elementy z czerwonego obszaru (czyli $S \cap T$) policzylibyśmy dwa razy - raz jako elementy S, a raz jako elementy T. Dlatego, żeby otrzymać właściwy końcowy wynik, musimy od $|S| + |T|$ odjąć jeden raz $|S \cap T|$.

Prawo sumy - przykład

Zadanie

Ile liczb naturalnych dodatnich, mniejszych lub równych 1000, dzieli się przez 3 lub przez 5?

Rozważmy dla zbiory: A_1 - zbiór liczb mniejszych lub równych 1000, podzielnych przez 3 i A_2 - zbiór liczb mniejszych lub równych 1000, podzielnych przez 5.
Zgodnie z twierdzeniem o zliczaniu wielokrotności
$|A_1| = [\frac{1000}{3}] = 333$, a $|A_2| = [\frac{1000}{5}] = 200$.

Prawo sumy - przykład

Teraz łatwo można popełnić błąd twierdząc, że skoro $A = A_1 \cup A_2$, to $|A| = |A_1| + |A_2|$. Jak widzimy w prawie sumy, tak nie jest, gdyż zbiory A_1 i A_2 nie są rozłączne (np. liczba 300 należy do obydwu zbiorów, więc licząc tak jak w poprzednim zdaniu policzylibyśmy ją dwa razy!).
Żeby przeprowadzić poprawne obliczenia, potrzebujemy obliczyć moc zbioru $A_1 \cap A_2$. Są to liczby mniejsze od 1000, podzielne przez 3 i 5, czyli podzielne przez $NWW(3,5) = 15$. Zgodnie z twierdzeniem o zliczaniu wielokrotności $|A_1 \cap A_2| = [\frac{1000}{15}] = 66$.
Zgodnie z prawem sumy można zatem obliczyć:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| = 333 + 200 - 66 = 467.$$

Zasada włączeń i wyłączeń

Uogólnimy teraz prawo sumy na sytuację z większą liczbą zbiorów.

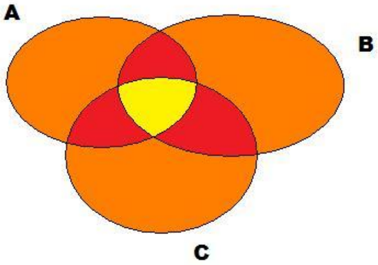
Zasada włączeń i wyłączeń

Niech $A_1, A_2, \ldots, A_n$ będą zbiorami skończonymi. Aby znaleźć liczbę elementów zbioru $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, należy znaleźć liczby wszystkich możliwych przecięć tych zbiorów, dodać do siebie wyniki uzyskane dla przecięć nieparzystej liczby zbiorów, a następnie odjąć wyniki uzyskane dla przecięć parzystej liczby zbiorów. Ściślej:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| + \sum_{k \neq i \neq j \neq k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots$$

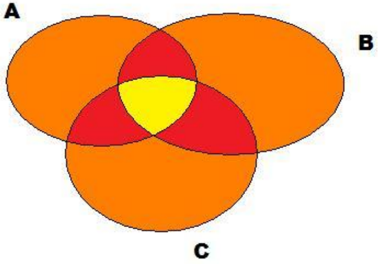
Zauważmy, że dla dwóch zbiorów otrzymujemy po prostu prawo sumy.

Zasada włączeń i wyłączeń - objaśnienie dla 3 zbiorów



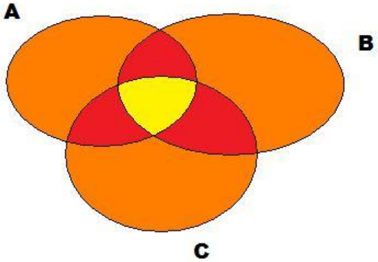
Aby obliczyć liczbę elementów na zakolorowanym obszarze, trzeba policzyć każdy element $A \cup B \cup C$ dokładnie raz. Gdybyśmy liczyli $|A| + |B| + |C|$, to faktycznie policzylibyśmy po raz elementy z pomarańczowego obszaru, ale elementy z czerwonego obszaru (czyli przecięcia parzystej liczby zbiorów) policzylibyśmy dwa razy, a elementy przecięcia $A \cap B \cap C$ (żółty obszar) nawet 3 razy!

Zasada włączeń i wyłączeń - objaśnienie dla 3 zbiorów



Jeśli odejmiemy od $|A| + |B| + |C|$ sumę $|A \cap B| + |B \cap C| + |C \cap A|$ to co prawda elementy z pomarańczowych i czerwonych obszarów policzyliśmy efektywnie po raz, ale elementy z żółtego obszaru najpierw policzyliśmy 3 razy, a potem odjęliśmy 3 razy - czyli efektywnie ich nie policzyliśmy. Dlatego trzeba dodać $|A \cap B \cap C|$ jeszcze raz.

Zasada włączeń i wyłączeń - objaśnienie dla 3 zbiorów



Ostatecznie:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |B \cap C| + |C \cap A|) + |A \cap B \cap C|.$$

Zasada włączeń i wyłączeń - przykład

Zadanie

Ile jest liczb całkowitych 4-cyfrowych, spełniających warunek: w ich zapisie dziesiętnym **nie** występuje co najmniej jedna z cyfr: 0, 1 lub 2?

Niech A będzie naszym szukanym zbiorem. Zauważmy, że można jego elementy opisać alternatywą: nie występuje 0 **lub** nie występuje 1 **lub** nie występuje 2.
Zatem zbiór A jest sumą trzech podzbiorów: A_0 - zbiór liczb 4-cyfrowych, w których nie występuje cyfra 0, A_1 - zbiór liczb 4-cyfrowych, w których nie występuje cyfra 1 i A_2 - zbiór liczb 4-cyfrowych, w których nie występuje cyfra 2. Wykorzystamy zasadę włączeń i wyłączeń dla sumy $A_0 \cup A_1 \cup A_2$.

Zasada włączeń i wyłączeń - przykład

(...) A_0 - zbiór liczb 4-cyfrowych, w których nie występuje cyfra 0, A_1 - zbiór liczb 4-cyfrowych, w których nie występuje cyfra 1 i A_2 - zbiór liczb 4-cyfrowych, w których nie występuje cyfra 2. (...)
Do obliczania mocy każdego z tych zbiorów z osobna oraz ich przecięć, będzie potrzebne tak zwane prawo iloczynu, więc wrócimy do tego w kolejnej prezentacji. W każdym razie, udowodnimy w przyszłości, że:
$|A_0| = 9^4 = 6561$; $|A_1| = |A_2| = 8 \cdot 9^3 = 5832$;
$|A_1 \cap A_2| = 7 \cdot 8^3 = 3584$; $|A_0 \cap A_1| = |A_0 \cap A_2| = 8^4 = 4096$;
$|A_0 \cap A_1 \cap A_2| = 7^4 = 2401$.

Zasada włączeń i wyłączeń - przykład

$|A_0| = 9^4 = 6561$; $|A_1| = |A_2| = 8 \cdot 9^3 = 5832$;
$|A_1 \cap A_2| = 7 \cdot 8^3 = 3584$; $|A_0 \cap A_1| = |A_0 \cap A_2| = 8^4 = 4096$;
$|A_0 \cap A_1 \cap A_2| = 7^4 = 2401$.
Z zasady włączeń i wyłączeń:

$$|A| = |A_0 \cup A_1 \cup A_2| = |A_0| + |A_1| + |A_2| - (|A_0 \cap A_1| + |A_0 \cap A_2| + |A_1 \cap A_2|) +$$

$$+ |A_0 \cap A_1 \cap A_2| = 8850.$$

Bardzo prostym wnioskiem z prawa sumy jest:

Prawo różnicy

Dla dowolnych zbiorów A i X zachodzi:

$$|X \setminus A| = |X| - |X \cap A|.$$

W szczególności, jeśli $A \subset X$ to $|X \setminus A| = |X| - |A|$.

Zwłaszcza ten ostatni wniosek przydaje się dość często, by zmienić zagadnienie zliczania elementów jakiegoś zbioru w zliczanie elementów jego dopełnienia do zbioru, którego moc znamy.

Prawo różnicy - przykład

Zadanie

Ile jest liczb całkowitych 4-cyfrowych, takich, w których co najmniej raz występuje cyfra 0, co najmniej raz cyfra 1 i co najmniej raz cyfra 2?

Zamiast obliczać zbiór B zadany warunkami zadania, obliczymy jego dopełnienie do zbioru X wszystkich liczb 4-cyfrowych, którego moc to: $|X| = 9000$. Dopełnienie zbioru B do X to zbiór takich liczb 4-cyfrowych, w których nie występuje cyfra 0 lub nie występuje cyfra 1 lub nie występuje cyfra 2, czyli zbiór A z poprzedniego zadania. Ostatecznie, z prawa różnicy:

$$|B| = |X \setminus A| = |X| - |A| = 9000 - 8850 = 150.$$