

4a. Podstawowe pojęcia teorii drzew

Grzegorz Kosiorowski

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

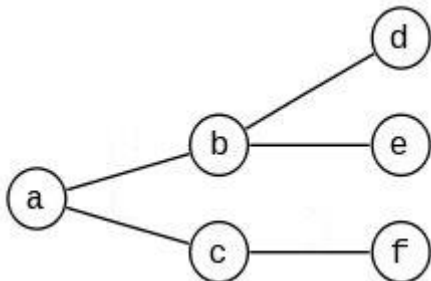
Przypomnienie definicji

Las

Las to graf prosty, acykliczny.

Drzewo

Drzewo to graf prosty, spójny, acykliczny (czyli spójny las).
Wierzchołki drzewa nazywamy *węzłami*. Podgraf spójny drzewa nazywamy *poddrzewem*.



Charakteryzacja drzew

Dla grafu $T = (V, E)$ następujące warunki są równoważne:

1. T jest drzewem.
2. T nie zawiera cykli i ma $|V| - 1$ krawędzi.
3. T jest spójny i ma $|V| - 1$ krawędzi (czyli nie da się zmniejszyć liczby krawędzi, by drzewo nadal było spójne).
4. T jest spójny i każda jego krawędź jest mostem.
5. Dowolne dwa wierzchołki grafu są połączone dokładnie jedną drogą prostą.
6. T nie zawiera cykli, lecz dodanie dowolnej nowej krawędzi tworzy dokładnie jeden cykl.

Motywacja badań drzew:

- Struktury danych, czyli przechowywanie informacji umożliwiające szybki dostęp do każdego poziomu struktury.
- Unikanie redundancji.
- Opis zjawisk związanych z hierarchią (starszeństwa, zwierzchnictwa, katalogów, sekwencji czasowej).

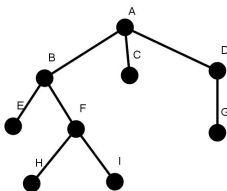
Jako, że najczęściej wierzchołki drzew mają swoje naturalne interpretacje w danym modelu (nazwy, osoby itp.), często przydzielamy im tak zwane „etykiety”, które nieformalnie będziemy rozumieć jako informacje zawarte w tych wierzchołkach.

Drzewo z wyróżnionym korzeniem

Drzewo z wyróżnionym korzeniem

*Drzewo z wyróżnionym korzeniem jest to drzewo z wyróżnionym jednym wierzchołkiem, nazywanym *korzeniem*.*

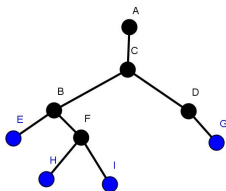
Tradycyjnie, drzewa z wyróżnionym korzeniem rysuje się tak, by korzeń był na samej górze. Czasem interpretuje się je jako grafy skierowane ze strzałkami skierowanymi w dół. A jest korzeniem poniższego drzewa.



Liść

Liść drzewa to wierzchołek drzewa stopnia 1, który nie jest wyróżniony jako korzeń.

Niebieskie wierzchołki w tym drzewie to liście. A jest korzeniem, więc choć jest stopnia 1, to nie jest liściem.

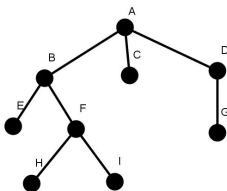


Rodzice i dzieci

Rodzice i dzieci

Jeśli para (v, w) jest krawędzią drzewa z wyróżnionym korzeniem, to v jest *rodzicem* w , a w jest *dzieckiem* v . Ogólniej, w jest *potomkiem* v , jeśli $w \neq v$ i v jest wierzchołkiem jedynej drogi prostej z korzenia do wierzchołka w . v nazywamy wtedy *przodkiem* w .

Wszystkie wierzchołki są potomkami A , ale tylko B , C i D są jego dziećmi. D jest rodzicem G , a B jest przodkiem I .

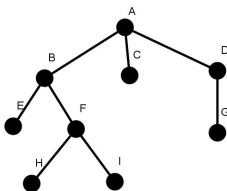


Poziom wierzchołka

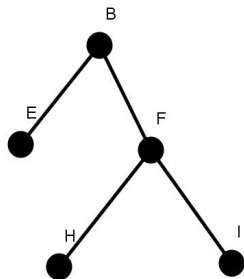
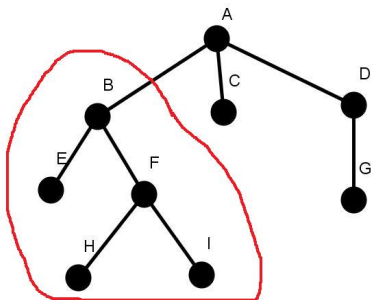
Poziom wierzchołka

Poziomem wierzchołka v nazywamy długość jedynej drogi prostej od korzenia do v . Wysokość drzewa z wyróżnionym korzeniem to największy możliwy poziom wierzchołka tego drzewa.

Poniższe drzewo ma wysokość 3. B , C i D są wierzchołkami poziomu 1, E , F i G - poziomu 2, a H i I - poziomu 3.



Poddrzewo



Drzewo po prawej jest poddrzewem drzewa po lewej o korzeniu B .

Poddrzewo

Poddrzewo o korzeniu v jest to drzewo T_v , składające się z korzenia v , wszystkich jego potomków i wszystkich krawędzi (potencjalnie skierowanych) łączących ich.

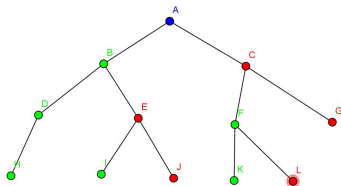
Przykłady zastosowań drzew z wyróżnionym korzeniem

- Struktura uporządkowania katalogów, podkatalogów i plików
- Opis jakiegokolwiek struktury hierarchicznej (np. władze uczelni)
- Drzewo genealogiczne
- „Drzewkowy” zapis algorytmu postępowania (np. przepis kucharski, poradnik diagnostyczno-medyczny).

Drzewo binarne

Drzewo binarne

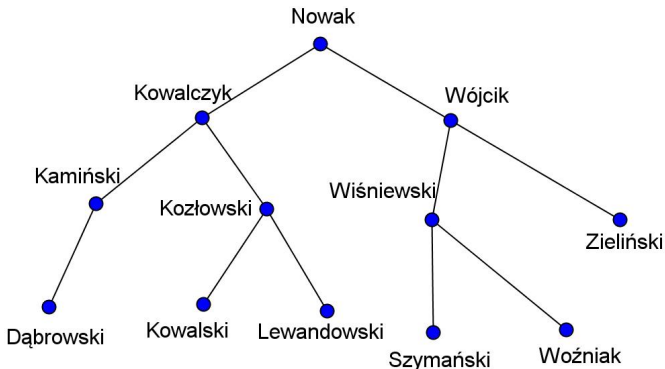
Drzewo binarne jest to drzewo z wyróżnionym korzeniem, w którym każdy węzeł ma **co najwyżej** dwoje dzieci, wśród których wyróżniamy dzieci prawe i lewe.



Zielone wierzchołki to lewe dzieci swoich rodziców, a czerwone - prawe. Warto zauważyć, że wierzchołek D ma tylko dziecko lewe.

Drzewo binarne - przykład

Przykładem drzewa binarnego jest łatwa do przeszukiwania alfabetyczna baza danych (np. pacjentów szpitala), będąca szczególnym przypadkiem tzw. drzewa poszukiwań binarnych.



Zbiór uporządkowany

Poniżej: nie definicja, ale intuicja wystarczająca do naszych zastosowań.

Zbiór uporządkowany

Zbiorem uporządkowanym będziemy nazywać zbiór, w którym każde dwa różne elementy można porównać i powiedzieć, że jeden jest „większy” lub „mniejszy” od drugiego. Sformułowanie „ a jest mniejsze od b ” oznaczamy zwykle $a \prec b$ lub po prostu $a < b$. Porządek taki powinien być przechodni, czyli zachodzi $(a \prec b \wedge b \prec c) \Rightarrow a \prec c$.

Przykłady zbiorów uporządkowanych: zbiór liczb rzeczywistych ze „standardową” nierównością liczb $<$, zbiór słów z porządkiem alfabetycznym (słowa znajdujące się wcześniej w porządku alfabetycznym są „mniejsze”), zbiór ludzi uporządkowany w kolejności starszeństwa wieku (osoby młodsze są „mniejsze”).

Drzewo poszukiwań binarnych

Drzewo poszukiwań binarnych jest to drzewo binarne składające się z węzłów z uporządkowanymi etykietami (węzłów indeksowanych zbiorem uporządkowanym), w którym lewe poddrzewo każdego węzła zawiera wyłącznie węzły o etykietach nie większych niż etykieta węzła a prawe poddrzewo zawiera wyłącznie węzły o etykietach nie mniejszych niż etykieta węzła.

W ten sposób tworzy się bazy danych, których etykiety są np. liczbami lub słowami (uporządkowanymi alfabetycznie), i które bardzo szybko można przeszukać i znaleźć dany węzeł.

Drzewo poszukiwań binarnych - przeszukiwanie

Przeszukiwanie drzewa poszukiwań binarnych jest rekurencyjne, w głąb:

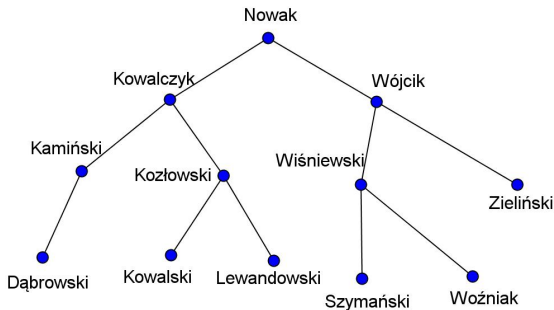
PRZESZUKIWANIEBINARNE(v, x)

Dane: Drzewo poszukiwań binarnych z korzeniem v , x - poszukiwana wartość etykiety.

Zmienne: w - węzeł.

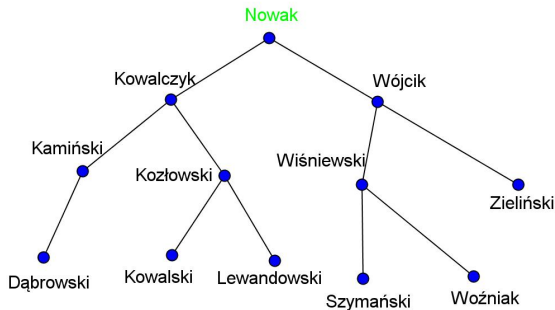
- I. Podstawiamy $w = v$.
- II. Porównujemy etykietę w i x . Jeśli etykiety są równe: STOP.
- III. Jeśli etykieta v jest większa od x , to $w :=$ lewe dziecko v i przechodzimy do kroku V.
- IV. Jeśli etykieta v jest mniejsza od x , to $w :=$ prawe dziecko v i przechodzimy do kroku V.
- V. Wykonujemy PRZESZUKIWANIEBINARNE(w, x).
- **Rezultat:** w to węzeł o etykiecie x .

Przeszukiwanie - przykład



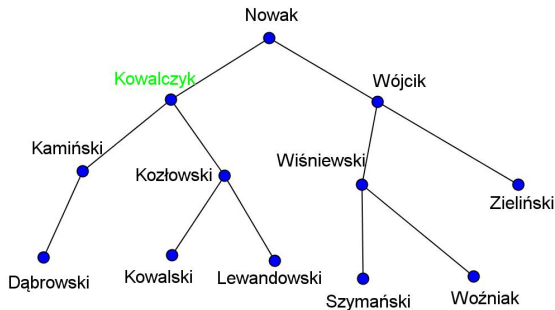
Założmy, że za pomocą powyższego algorytmu szukamy w bazie opisanej powyższym drzewem etykiety „Kowalski”. Wykonujemy wtedy algorytm PRZESZUKIWANIE(Nowak,Kowalski).

Przeszukiwanie - przykład



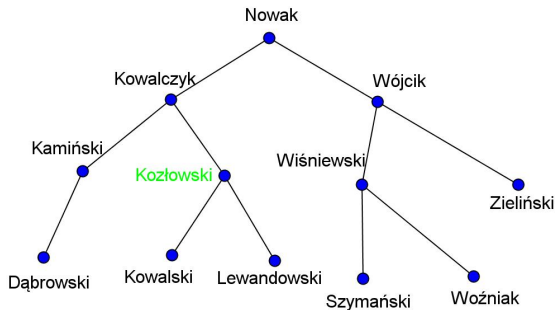
Nowak \neq Kowalski, więc nie kończymy algorytmu. Ponieważ alfabetycznie $\text{Kowalski} < \text{Nowak}$, przesuwamy się do lewego dziecka Nowaka, którym jest Kowalczyk i odpalamy algorytm PRZESZUKIWANIE(Kowalczyk, Kowalski).

Przeszukiwanie - przykład



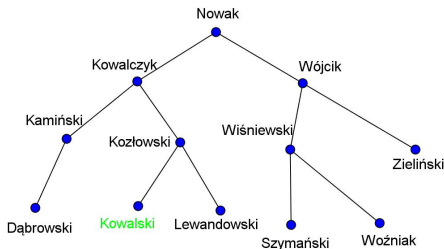
Kowalczyk \neq Kowalski, więc nie kończymy algorytmu. Ponieważ alfabetycznie $Kowalczyk < Kowalski$, przesuwamy się do prawego dziecka Kowalczyka, którym jest Kozłowski i odpalamy algorytm PRZESZUKIWANIE(Kozłowski, Kowalski).

Przeszukiwanie - przykład



Kozłowski \neq Kowalski, więc nie kończymy algorytmu. Ponieważ alfabetycznie $Kowalski < Kozłowski$, przesuwamy się do lewego dziecka Kozłowskiego, którym jest Kowalski i odpalamy algorytm PRZESZUKIWANIE(Kowalski, Kowalski).

Przeszukiwanie - przykład



Kowalski = Kowalski, więc algorytm kończy działanie - znalazł szukany obiekt. Warto zauważyć, że stało się to w czwartym kroku i, że każdy wierzchołek tego grafu w 4 krokach można wyszukać tym algorytmem. Gdyby np. sprawdzać wierzchołki po kolei, alfabetycznie, większość wierzchołków znaleźlibyśmy później (do 12 kroków).

Jeśli drzewo przeszukiwane jest „dobrze wyważone” (czyli skonstruowane tak, by miało jak najmniejszą wysokość) to czas działania tego algorytmu jest $O(\log n)$ (gdzie n jest liczbą wierzchołków).

Algorytmy przeszukujące do samodzielnego stworzenia i przeanalizowania:

- Znajdowanie największego/najmniejszego elementu w drzewie poszukiwań binarnych.
- Znajdowanie poprzednika/następnika danego elementu w drzewie poszukiwań binarnych.
- Wstawianie nowego elementu/usuwanie jednego z elementów, by nie zaburzyć struktury tego drzewa (jak najmniej zmienić wysokość).