2a. Zagadnienia grafów nieskierowanych: cykle Eulera i Hamiltona

Grzegorz Kosiorowski

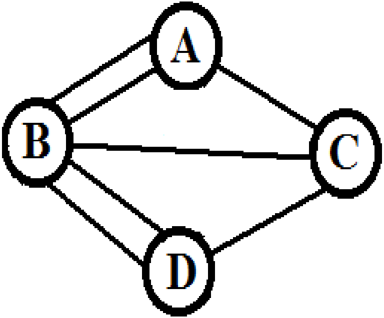
Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

Zastrzeżenie

W tej prezentacji (i kilku kolejnych) grafy, które badamy są domyślnie grafami nieskierowanymi i bez wag, chyba, że wyraźnie wspomnimy inaczej. Generalnie, zagadnienia te dla grafów skierowanych nie są aż tak znacząco różne, by dyskutować je osobno.

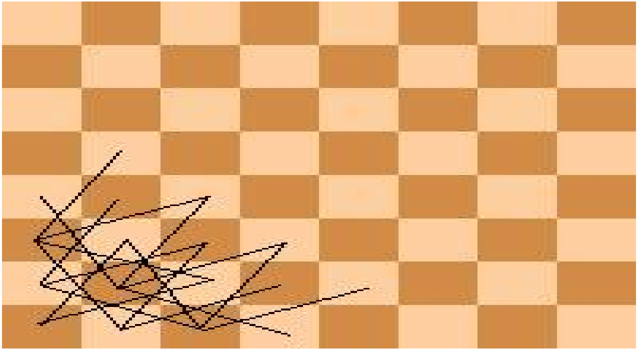
Przykładowe problemy

Pierwszy znany problem teorii grafów: zagadnienie mostów królewieckich rozwiązane przez Leonharda Eulera (1736). Królewiec - miasto leżące na dwu brzegach i dwu wyspach rzeki Pregoły, połączonych w czasach Eulera siedmioma mostami jak na rysunku poniżej (źródło:Wikipedia). Czy da się pójść na spacer po całym mieście, tak by po każdym moście przejść dokładnie raz?



Przykładowe problemy

Alternatywny problem skoczka szachowego: czy da się skoczkiem obejść szachownicę, by tylko raz przejść przez każde połączenie pomiędzy polami (pola są połączone w ten sposób, by z jednego dało się przejść na drugie jednym ruchem skoczka), jak na rysunku poniżej.



Bardziej praktyczne problemy eulerowskie

- Problem listonosza - jak, roznosząc pocztę, przejść po każdej ulicy swego rewiru dokładnie raz (w ten sposób tworząc najkrótszą trasę).
- Problem sprzątania: jak zaprogramować robota sprzątającego korytarze jakiegoś budynku, by przez każdy korytarz przejeżdżał dokładnie raz (znów najkrótsza trasa daje optymalizację kosztów).
- Projektowanie optymalnych obwodów elektrycznych.
- Sekwencjonowanie DNA.
- Zagadki związane z rysowaniem kształtów „bez odrywania ręki”.

Definicje

Cykl Eulera

Cyklem Eulera nazywamy zamkniętą drogę przechodzącą przez każdą krawędź grafu dokładnie raz.

Formalnie cykl Eulera nie musi być cyklem w sensie naszej wcześniejszej definicji (bo wierzchołki po drodze mogą się powtarzać). Natomiast musi być drogą prostą.

Droga Eulera

Drogą Eulera nazywamy drogę prostą zawierającą wszystkie krawędzie grafu.

Graf eulerowski

Grafem eulerowskim nazywamy graf posiadający cykl Eulera.

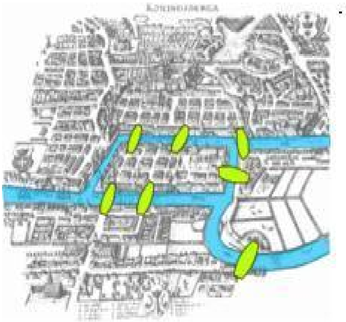
Charakterystyka grafów eulerowskich

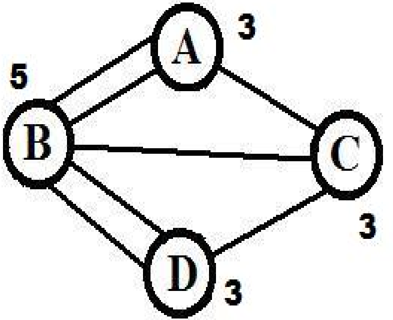
Wszystkie wcześniejsze zagadnienia można sprowadzić do znalezienia drogi lub cyklu Eulera w pewnym grafie. Jak łatwo się domyślić, nie zawsze droga Eulera w grafie istnieje (nie mówiąc już o cyklu) - przykładem jest 4-klika K_4. Zanim zaczniemy szukać algorytmu rozwiązującego problem, należy wiedzieć jak rozstrzygnąć, czy dla bardziej skomplikowanych grafów nasz problem w ogóle ma rozwiązanie?

Twierdzenie Eulera

Spójny graf $G = (V, E)$ jest eulerowski wtedy i tylko wtedy, gdy stopień każdego wierzchołka jest parzysty. Graf G ma drogę Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy ma dokładnie dwa lub zero wierzchołków stopnia nieparzystego.
W wypadku grafów niespójnych, jeśli przynajmniej dwie składowe posiadają krawędzie, to droga Eulera nie istnieje.

Zastosowanie - problem mostów królewieckich





Jak widać, graf odpowiadający spacerowi po mostach królewieckich ma 4 wierzchołki nieparzystego stopnia, więc nie może istnieć w nim cykl, ani nawet droga Eulera. Zatem zadany spacer jest niemożliwy.

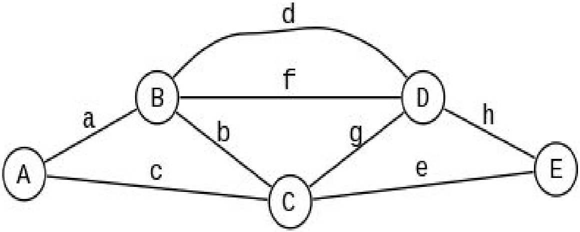
Zastosowanie - alternatywny problem skoczka szachowego

W tym problemie wierzchołkami grafu były pola szachowe, a krawędzie łączyły pola, pomiędzy którymi skoczek mógł wykonać ruch.
Zauważmy, że z pól sąsiadujących z narożnikiem szachownicy skoczki mogą wykonać 3 możliwe ruchy.
Ponieważ takich pól jest 8, graf dla tego problemu zawiera 8 wierzchołków stopnia 3, a więc nie da się przejść dokładnie raz wszystkich krawędzi tego grafu.

Wnioski dla innych grafów

- Dla antyklik pytanie o cykl bądź drogę Eulera nie ma sensu (bo grafy te nie mają krawędzi), ale formalnie antykliki są eulerowskie, bo droga pusta, składająca się z 0 krawędzi przechodzi przez wszystkie krawędzie.
- Kliki K_n są eulerowskie tylko dla n nieparzystych.
- Grafy-drogi zawsze mają drogę Eulera, ale nigdy cykli Eulera. Grafy-cykle są eulerowskie.
- Spośród grafów platońskich tylko graf ośmiościanu jest eulerowski.
- Graf Petersena nie jest eulerowski.
- Drzewa nie są eulerowskie.
- Grafy zawierające mosty nie są eulerowskie (acz mogą mieć drogę Eulera).

Potrzeba systematycznego podejścia



Nawet jeśli wiemy, że w danym grafie istnieje droga lub cykl Eulera, to nie zawsze się da taką drogę znaleźć na chybił-trafił dopisując kolejne krawędzie dla naszej drogi. Powyższy graf jest eulerowski, ale jeśli spróbujemy wygenerować cykl Eulera startując z wierzchołka B i wybierając kolejno krawędzie:

d, f, b, c, a;

to znajdziemy się w pułapce: drogi tej nie można kontynuować, a nie przeszliśmy jeszcze całego grafu.

Algorytm Fleury'ego - część I

Algorytm Fleury'ego

Dane: Graf $G = (V(G), E(G))$, spełniający założenia twierdzenia Eulera.

Zmienne: ES - ciąg krawędzi.

- I. Wybierz dowolny wierzchołek v nieparzystego stopnia, jeśli istnieje. W przeciwnym wypadku wybierz dowolny wierzchołek v. Niech $ES = \emptyset$.
- II. Jeśli z wierzchołka v nie wychodzi ani jedna krawędź $\longrightarrow$ STOP.
- III. Jeśli pozostała dokładnie jedna krawędź wychodząca z v, np. vw, wtedy usuń vw z $E(G)$ oraz v z $V(G)$ i przejdź do kroku V.
- IV. Jeśli została więcej niż jedna krawędź wychodząca z wierzchołka v, wybierz krawędź vw, która nie jest mostem. Następnie usuń vw z $E(G)$.

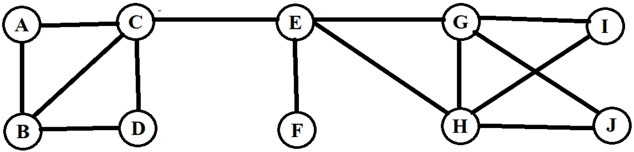
Algorytm Fleury'ego - część II

Algorytm Fleury'ego

- V. Dołącz vw na końcu ciągu ES, zastąp v wierzchołkiem w i przejdź do kroku II.
- VI. **Rezultat**: ES to droga lub cykl Eulera.

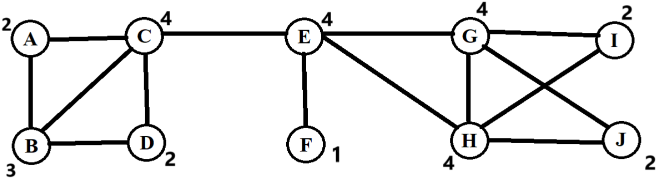
Wyjaśnienie: zawsze startujemy z wierzchołka nieparzystego stopnia - jeśli takiego nie ma, to z dowolnego i w kolejnych krokach wybieramy dowolne krawędzie przedłużające naszą drogę, pod warunkiem, że nie są mostami w grafie, który tworzą niewybrane jeszcze krawędzie (chyba, że to jest jedyna możliwość wyboru, czyli jedyna krawędź wychodząca z wierzchołka, do którego ostatnio dotarliśmy).

Algorytm Fleury'ego - przykład



Spróbujemy zastosować algorytm Fleury'ego dla powyższego grafu. Przedstawię tutaj sposób postępowania przyjęty w ramach tego kursu (poza znajomością algorytmu na sprawdzianie/egzaminie trzeba też swoją znajomość przedstawić tak, by było to zrozumiałe - dlatego stosujemy ustandaryzowany opis „tabelkowy").
Zaczynamy od sprawdzenia, czy jest ten graf dopuszcza cykl lub drogę Eulera. W tym celu obliczamy i zaznaczamy na grafie stopnie wszystkich wierzchołków.

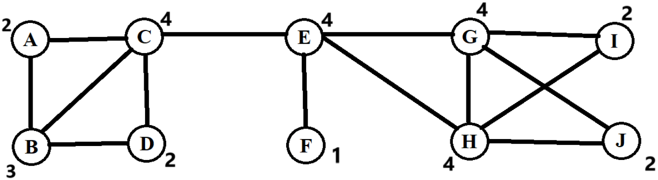
Algorytm Fleury'ego - przykład



Jak widać, tylko wierzchołki B i F są stopnia nieparzystego, więc chociaż w grafie nie ma cyklu Eulera, znajdziemy w nim drogę Eulera. Działanie algorytmu zapisujemy w takiej tabeli:

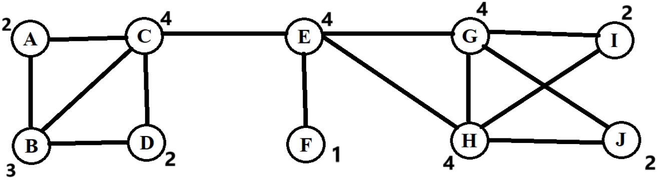
Nr etapu	wybór	inne możliwości	obecny wierzchołek
1			
2			

Algorytm Fleury'ego - krok 1



W pierwszym kroku wybieramy punkt początkowy. Zgodnie z algorytmem Fleury'ego może być to tylko wierzchołek o nieparzystym stopniu.

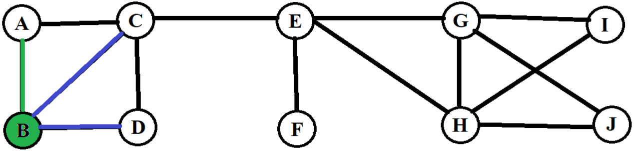
Algorytm Fleury'ego - krok 1



W pierwszym kroku wybieramy punkt początkowy. Zgodnie z algorytmem Fleury'ego może być to tylko wierzchołek o nieparzystym stopniu. Z możliwych dwóch punktów wybieramy np. B, a w tabeli odnotowujemy, że F było innym możliwym wyborem.

Nr etapu	wybór	inne możliwości	obecny wierzchołek
1	B	F	B

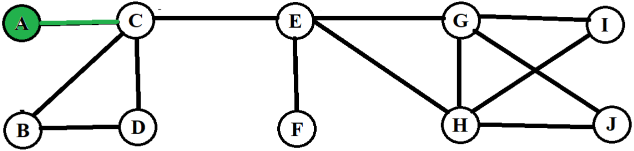
Algorytm Fleury'ego - krok 2



Startujemy z punktu B. Ani jedna z krawędzi incydentnych z B nie jest mostem, więc zgodnie z punktem IV algorytmu Fleury'ego możemy wybrać dowolną - powiedzmy, że to będzie BA. Zapisujemy wybór i inne opcje, które algorytm pozwalał nam wybrać w tym kroku, w tabeli.

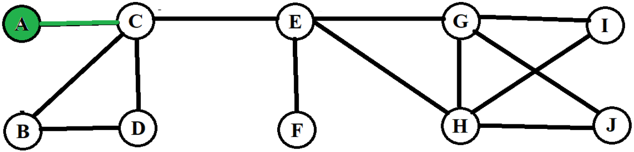
Nr etapu	wybór	inne możliwości	obecny wierzchołek
1	B	F	B
2	BA	BC,BD	A

Algorytm Fleury'ego - krok 2



Na zakończenie kroku 2 zapamiętujemy do jakiego wierzchołka doszliśmy po wybraniu naszej krawędzi (tu A, jako drugi koniec krawędzi BA) i usuwamy z grafu krawędź, z której skorzystaliśmy (BA). Gdyby to była ostatnia krawędź incydentna z B, to usunęlibyśmy też wierzchołek B (ale w tym przypadku tak nie jest).

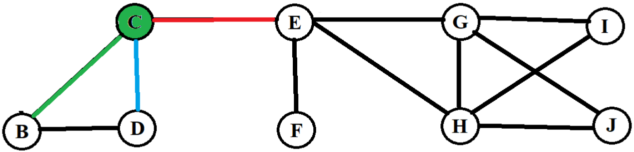
Algorytm Fleury'ego - krok 3



Z punktu A obecnie wychodzi tylko jedna krawędź: AC. Zgodnie z punktem III algorytmu Fleury'ego, musimy ją wybrać jako kolejną (nie ma innych opcji) i przejść na jej drugi koniec (obecnym wierzchołkiem staje się C), a następnie usunąć z grafu.

Nr etapu	wybór	inne możliwości	obecny wierzchołek
2	BA	BC,BD	A
3	AC	-	C

Algorytm Fleury'ego - krok 4



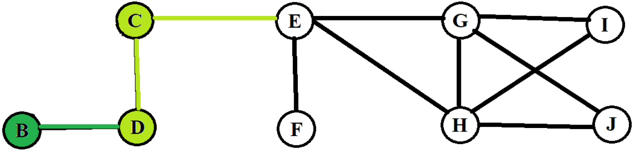
Ponieważ usunęliśmy ostatnią krawędź incydentną z wierzchołkiem A, usuwamy z grafu też wierzchołek A. Z obecnego wierzchołka C, wychodzą trzy krawędzie, więc stosujemy krok IV algorytmu. Okazuje się, że jedna (CE) jest mostem, więc nie możemy jej wybrać w tym kroku! W takiej sytuacji nie zapisujemy też jej jako „innej możliwości" (bo zgodnie z algorytmem Fleury'ego nie mogliśmy jej wybrać). Powiedzmy, że wybieramy z możliwych opcji krawędź CB, a CD notujemy jako możliwą opcję alternatywną.

Algorytm Fleury'ego - krok 4

Z obecnego wierzchołka C wychodzą trzy krawędzie, więc stosujemy krok IV algorytmu. Okazuje się, że jedna (CE) jest mostem, więc nie możemy jej wybrać w tym kroku! W takiej sytuacji nie zapisujemy też jej jako „innej możliwości" (bo zgodnie z algorytmem Fleury'ego nie mogliśmy jej wybrać). Powiedzmy, że wybieramy z możliwych opcji krawędź CB, a CD notujemy jako możliwą opcję alternatywną. Krawędź CB usuwamy z grafu.

Nr etapu	wybór	inne możliwości	obecny wierzchołek
3	AC	-	C
4	CB	CD (nie CE!)	B

Algorytm Fleury'ego - kroki 5-7



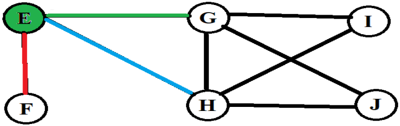
Kolejne trzy kroki algorytmu są bardzo proste, gdyż za każdym razem mamy tylko jedną opcję wyboru (na podstawie punktu III algorytmu): z wierzchołka B musimy wybrać krawędź BD, usunąć ją i przejść do wierzchołka D, z wierzchołka D wybieramy krawędź DC, usuwamy ją, przechodzimy do wierzchołka C, a stamtąd wybieramy krawędź CE i przenosimy się do wierzchołka E, usuwając krawędź CE.

Algorytm Fleury'ego - kroki 5-7

Z wierzchołka B musimy wybrać krawędź BD, usunąć ją i przejść do wierzchołka D, z wierzchołka D wybieramy krawędź DC, usuwamy ją, przechodzimy do wierzchołka C, a stamtąd wybieramy krawędź CE i przenosimy się do wierzchołka E, usuwając krawędź CE. Usuwamy też wierzchołki B,D,C, gdyż nie są już incydentne z żadną krawędzią.

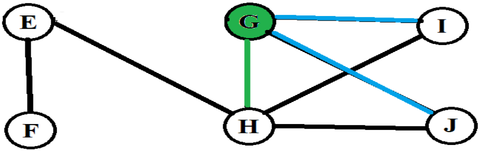
Nr etapu	wybór	inne możliwości	obecny wierzchołek
4	CB	CD	B
5	BD	-	D
6	DC	-	C
7	CE	-	E

Algorytm Fleury'ego - krok 8



Z obecnego wierzchołka *E* znów wychodzą trzy krawędzie, więc stosujemy krok IV algorytmu. Jedna z krawędzi (EF) jest mostem, więc nie możemy jej wybrać w tym kroku! Powiedzmy, że wybieramy z możliwych opcji krawędź EG, a EH notujemy jako możliwą opcję alternatywną. Krawędź EG usuwamy z grafu (krawędź EH staje się mostem!)

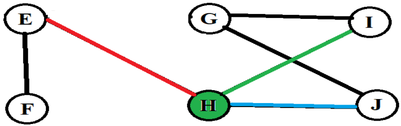
Nr etapu	wybór	inne możliwości	obecny wierzchołek
7	CE	-	E
8	EG	EH (nie EF!)	G



Z obecnego wierzchołka G znów wychodzą trzy krawędzie, lecz tym razem żadna nie jest mostem, więc możemy wybrać dowolną (np. GH), a pozostałe (GI, GJ) zapisać jako „inne możliwości”. Krawędź GH usuwamy z grafu.

Nr etapu	wybór	inne możliwości	obecny wierzchołek
8	EG	EH	G
9	GH	GI, GJ	H

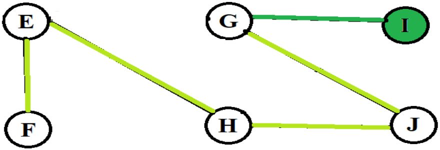
Algorytm Fleury'ego - krok 10



Z obecnego wierzchołka *H* też wychodzą trzy krawędzie, więc stosujemy krok IV algorytmu. Jedna z krawędzi (HE) jest mostem, więc nie możemy jej wybrać w tym kroku. Zauważmy, że nie była mostem w startowym grafie, stała się nim w trakcie wykonywania algorytmu. Powiedzmy, że wybieramy z możliwych opcji krawędź HI, a HJ notujemy jako możliwą opcję alternatywną. Krawędź HI usuwamy z grafu.

Nr etapu	wybór	inne możliwości	obecny wierzchołek
9	GH	GI, GJ	H
10	HI	HJ (nie HE!)	I

Algorytm Fleury'ego - dalsze kroki



Kolejne kroki algorytmu są już na tyle trywialne, że można przeanalizować je jednocześnie. Nie mamy żadnej alternatywy dla wyboru kolejno krawędzi: IG, GJ, JH, HE, EF. Po wybraniu ostatniej krawędzi EF, zgodnie z krokiem II zatrzymujemy algorytm, gdyż z wierzchołka F, w którym kończymy nie wychodzą już żadne krawędzie. Poza zapisaniu algorytmu powinna powstać tabela taka, jak na następnym slajdzie.

Algorytm Fleury'ego - tabela

Nr etapu	wybór	inne możliwości	obecny wierzchołek
1	B	F	B
2	BA	BC,BD	A
3	AC	-	C
4	CB	CD	B
5	BD	-	D
6	DC	-	C
7	CE	-	E
8	EG	EH	G
9	GH	GI, GJ	H
10	HI	HJ	I
11	IG	-	G
12	GJ	-	J
13	JH	-	H
14	HE	-	E
15	EF	-	F

Prawdziwym wynikiem algorytmu jest ciąg wierzchołków z ostatniej kolumny: BACBDCEGHIGJHEF.

Uwagi dotyczące algorytmu Fleury'ego i jego zapisu

- Na sprawdzianie/egzaminie jako wynik algorytmu należy zapisać odpowiednią tabelkę oraz ciąg wierzchołków tworzący drogę/cykl Eulera.
- Notowanie alternatywnych opcji jest uciążliwe, ale konieczne na potrzeby sprawdzania, czy Państwo rozumieją algorytm. Bez tej kolumny, na małych grafach, które zwykle są na sprawdzianach, nie dałoby się odróżnić studenta znającego algorytm od zgadującego. Dlatego poprawne wypełnienie tej kolumny odpowiada za co najmniej połowę punktów za takie zadanie.
- Dla grafu, który nie jest prosty (ma pętle i krawędzie wielokrotne) zamiast ciągu kolejnych wierzchołków rozwiązaniem byłby ciąg kolejnych krawędzi (które musielibyśmy najpierw nazwać w sposób jednoznaczny).

Uwagi dotyczące algorytmu Fleury'ego i jego zapisu

- Algorytm nieprzypadkowo kończył się w wierzchołku F. Jeżeli konstruujemy drogę Eulera, (a nie cykl) to wierzchołki o nieparzystych stopniach są początkiem i końcem tej drogi. Gdybyśmy w pierwszym kroku wybrali F jako punkt startowy, algorytm zakończyłby się w B.
- Praktyczna kontrola: liczba kroków (i wierszy w tabeli) powinna wynosić o 1 więcej niż liczba krawędzi w grafie.
- Złożoność obliczeniowa algorytmu Fleury'ego dla grafu $G = (V, E)$, z uwzględnieniem testowania, czy dana krawędź jest mostem (np. algorytm Tarjana) wynosi $O(|V| \cdot |E|)$.
- Istnieje mniej złożona obliczeniowo ($O(|E|)$, po odpowiednim przygotowaniu), ale wymagająca większego zużycia pamięci i bardziej skomplikowana w opisie niż algorytm Fleury'ego procedura wyznaczania dróg Eulera: algorytm Hierholzera.

Przykładowe problemy hamiltonowskie

- Problem sprzątania: znów programujemy robota sprzątającego jakiś budynek, ale tym razem sale (znajdujące się na przecięciach korytarzy), a nie korytarze. Jak to zrobić, by podczas jednego objazdu nie trafiał 2 razy do tej samej sali?
- Klasyczny problem skoczka szachowego: odwiedzenie wszystkich pól szachownicy.
- Problem komiwojażera: utworzenie trasy przez zadaną liczbę miast tak, by przez żadne miasto nie przejeżdżać 2 razy.

Definicje

Wszystkie te problemy (i wiele podobnych) z punktu widzenia teorii grafów sprowadzają się do jednego: znalezienia cyklu Hamiltona.

Cykl Hamiltona

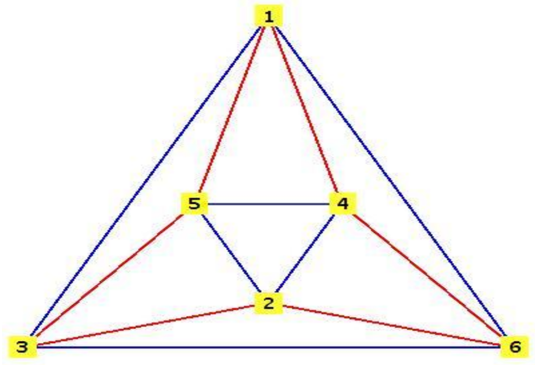
Cykl Hamiltona to cykl przechodzący przez wszystkie wierzchołki grafu.

Zwróćmy uwagę, że w szczególności cykl Hamiltona przechodzi przez każdy wierzchołek grafu (poza swoim początkiem i końcem) dokładnie raz. W przeciwieństwie do cyklu Eulera faktycznie jest cyklem w ścisłym sensie.

Graf hamiltonowski

Graf hamiltonowski to graf posiadający cykl Hamiltona.

Przykład



Na czerwono przykładowy cykl Hamiltona w grafie ośmiościanu.

Problem otwarty

Choć cykle Hamiltona wydają się podobne do cykli Eulera, nie jest znany dla nich odpowiednik twierdzenia Eulera.
Nie jest znana żadna metoda, pozwalająca szybko (w czasie wielomianowym) stwierdzić dla każdego grafu czy jest on hamiltonowski (chociaż sprawdzenie, czy dany cykl jest hamiltonowski jest dość proste - analogicznie do problemu rozkładu na czynniki pierwsze). Mamy do dyspozycji tylko różne warunki wystarczające, jak na przykład:

Twierdzenie Orego

Jeśli w grafie prostym $G = (V, E)$ o co najmniej 3 wierzchołkach każde dwa niesąsiednie wierzchołki v i w spełniają $\deg v + \deg w \geqslant |V|$, to graf G jest hamiltonowski.

Twierdzenia o hamiltonowskości

Istnieją prostsze wnioski z twiedzenia Orego

Wniosek z twierdzenia Orego

Jeśli w grafie prostym $G = (V, E)$ o co najmniej 3 wierzchołkach zachodzi jeśli $|E| \geqslant \frac{1}{2}(|V| - 1)(|V| - 2) + 2$ to graf G jest hamiltonowski.

Twierdzenie Diraca

Jeśli w grafie prostym $G = (V, E)$ o co najmniej 3 wierzchołkach każdy wierzchołek jest stopnia co najmniej $\frac{|V|}{2}$ to graf G jest hamiltonowski.

Nie są to jednak warunki konieczne - istnieją grafy, które nie spełniają twierdzenia Orego (a tym bardziej Diraca), a są hamiltonowskie.

Hamiltonowskość prostych grafów

- Grafy niespójne, zawierające wierzchołki rozspajające lub mosty nie są hamiltonowskie.
- Kliki K_n są hamiltonowskie dla $n \geqslant 3$.
- Grafy-cykle są hamiltonowskie, a grafy-drogi nie.
- Grafy platońskie są hamiltonowskie.
- Dodanie nowej krawędzi do grafu hamiltonowskiego nie psuje hamiltonowskości. Dodanie wierzchołka może zepsuć.
- Graf Petersena nie zawiera mostów, ale nie jest hamiltonowski. Natomiast po usunięciu dowolnego wierzchołka i krawędzi do niego incydentnych, ten graf stanie się hamiltonowski.