2. Funkcje i ich odwracanie

Grzegorz Kosiorowski

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

Relacja i funkcja - definicja

Relacja

Dla danych zbiorów X, Y *relacją* nazywamy dowolny podzbiór iloczynu kartezjańskiego $X \times Y$. Jeśli para (x, y) należy do relacji $R \subset X \times Y$, to zapisujemy ten fakt: xRy i czytamy: „x jest w relacji R z y".

Funkcja

Funkcją f prowadzącą ze zbioru $X \neq \emptyset$ w zbiór $Y \neq \emptyset$ (notacja: $f : X \to Y$) nazywamy relację w $X \times Y$ taką, że każdy element $x \in X$ wchodzi w relację z dokładnie jednym elementem $y \in Y$.
Zbiór X nazywamy *dziedziną* funkcji f i oznaczamy przez D_f. Jego elementy to *argumenty* funkcji f.
Zbiór Y nazywamy *przeciwdziedziną* funkcji f.
Zbiór $f(X) = \{y \in Y : \exists x \in X : f(x) = y\}$ to *zbiór wartości* funkcji f. Elementy tego zbioru to *wartości* funkcji f.

Uwagi i Interpretacje

Definicja funkcji jest tożsama z definicją znaną ze szkoły. Najważniejsze jest w niej, że każdemu elementowi dziedziny przypisujemy jeden element przeciwdziedziny. Należy pamiętać, do opisu funkcji nie wystarcza „przepis" czyli wzór obliczenia wartości funkcji w każdym punkcie dziedziny, ale też trzeba podać samą dziedzinę i przeciwdziedzinę (chyba, że jest domyślnie znana). Relację możemy sobie wyobrażać jako „funkcję wielowartościową" tj. takie „odwzorowanie", które argumentowi może przypisywać wiele wartości (albo i żadnej). Relacja zwykle nie jest funkcją (acz każda funkcja jest relacją).

Przykłady funkcji

W tej prezentacji wyjątkowo domyślnie będziemy się zajmować funkcjami rzeczywistymi (czyli o dziedzinie i przeciwdziedzinie zawartej w $\mathbb{R}$), ale znamy również zupełnie inne funkcje:

- Funkcja zadana na zbiorze ludzi np. funkcja „matka”, która każdemu człowiekowi przyporządkowuje jego matkę.
- Znane ze szkoły ciągi liczbowe, czyli funkcje określone na $\mathbb{N}$ o wartościach w $\mathbb{R}$. ($a_n = a(n)$).
- Funkcja na zbiorze państw, przyporządkowująca każdemu państwu jego największego partnera handlowego (spośród innych państw).

Przykłady nie-funkcji

Nie są funkcjami (a są relacjami):

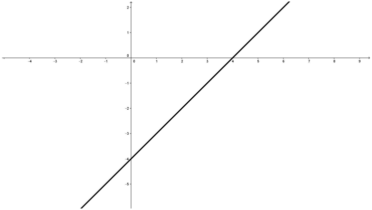
- $f(x) = \frac{1}{x}$, gdy $X = Y = \mathbb{R}$ (bo $0 \in D_f$)
- $f(x) = y \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$, $X = Y = [-1, 1]$ (bo dla $x = 0$ przyjmowałaby 2 różne wartości)
- „relacja rodzeństwa” na zbiorze ludzi, która każdemu człowiekowi przypisuje wszystkich jego braci i siostry (bo niektórym argumentom nie przypisywałaby żadnych wartości, a innym kilka).

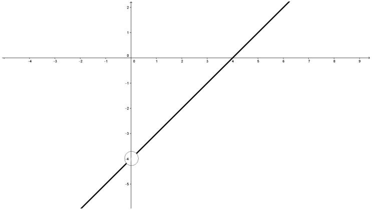
Równość funkcji

Równość funkcji

Mówimy, że funkcja f jest równa funkcji g jeśli $D_f = D_g$ i $\forall_{x \in D_f} f(x) = g(x)$.

Równość funkcji-przykład





$f(x) = x - 4$, $D_f = \mathbb{R}$ $\qquad$ $f(x) = \frac{x^2-4x}{x}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Te funkcje nie są równe, bo mają różną dziedzinę.

Zawężenie

Jeśli, wspominając o funkcji, nic nie mówimy o dziedzinie, to zakładamy, że jest ona maksymalna możliwa. Dlatego czasem mówimy o zawężeniu funkcji do jakiegoś zbioru (jeśli chcemy, by dziedzina funkcji została „sztucznie” zmniejszona).

Zawężenie

Niech $f : X \to Y$ i $A \subset X$. Wtedy $f|_A : A \to Y$ taka, że $\forall a \in A \; f|_A(a) = f(a)$ nazywana jest *zawężeniem* funkcji f do zbioru A.

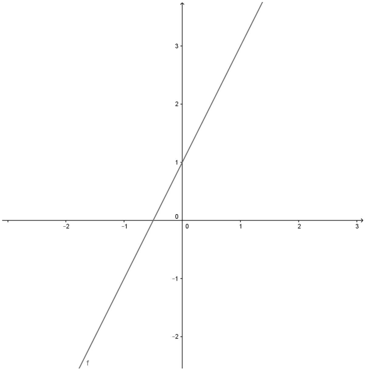
Różnowartościowość funkcji

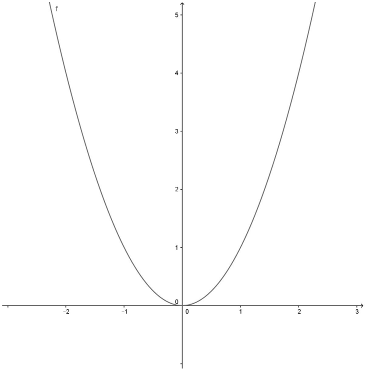
Co prawda to też było w szkole, ale jest to na tyle ważne, że przypomnę:

Injekcja (funkcja różnowartościowa)

Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy różnowartościową (lub injekcją), jeśli nie przyjmuje nigdy tej samej wartości dla dwu różnych argumentów, czyli $\forall_{a,b \in X} (a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b))$ lub też (sformułowanie równoważne) $\forall_{a,b \in X} (f(a) = f(b) \Rightarrow a = b)$.

Różnowartościowość funkcji - przykład





$f(x) = 2x + 1$ jest różnowartościowa

$g(x) = x^2$ nie jest różnowartościowa

Różnowartościowość funkcji - przykład

Z rysunku widać różnowartościowość (lub jej brak), ale pewniej jest sprawdzić obliczeniami.
Dla funkcji $f(x) = 2x + 1$ jeśli założymy, że $f(a) = f(b)$ dla pewnych wartości a i b to otrzymamy:

$$2a + 1 = 2b + 1 \Rightarrow 2a = 2b \Rightarrow a = b,$$

co dowodzi, że funkcja f jest różnowartościowa.
Dla funkcji $g(x) = x^2$ wystarczy podać kontrprzykład: otóż $g(-1) = 1 = g(1)$, co przeczy różnowartościowości tej funkcji.

Różnowartościowość funkcji - zastosowanie

Różnowartościowość funkcji jest kluczowa przy rozwiązywaniu równań. Dla funkcji różnowartościowej f, jeśli wiemy, że $f(a) = f(b)$, to $a = b$, dlatego możemy rozwiązując równanie „zniknąć” f po obu stronach.

Na przykład, wiemy, że $f(x) = \sqrt{x}$ jest różnowartościowa na $[0, +\infty)$. Dlatego możemy równanie $\sqrt{x} = 4$ zapisać jako $\sqrt{x} = \sqrt{16}$ i, dzięki różnowartościowości funkcji $\sqrt{x}$ „zniknąć” pierwiastek z obu stron równania, otrzymując $x = 16$.

Nie można tak zrobić na funkcjach które nie są różnowartościowe. Na przykład, niech $g(x) = x^2$. Równanie $x^2 = 4$ możemy zamienić na $x^2 = 2^2$, ale teraz „zniknięcie” kwadratu nie doprowadzi nas do równoważnej postaci - otrzymamy tylko $x = 2$, tracąc drugi możliwy pierwiastek: $x = -2$.

Podstawowe działania na funkcjach

Na funkcjach, jak na liczbach można wykonywać działania arytmetyczne.

Działania na funkcjach

Niech $f : X \to \mathbb{R}$ i $g : X \to \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, zaś $\diamond$ oznacza jedno z działań $+, -, \cdot$. Wtedy definiujemy funkcje:
a)$\alpha \cdot f : X \to \mathbb{R}$, $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$.
b)$f \diamond g : X \to \mathbb{R}$, $(f \diamond g)(x) = f(x) \diamond g(x)$.
Dodatkowo, jeśli $g(x) = 0 \Leftrightarrow x \in A$, to definiujemy:
c) $\frac{f}{g} : X \setminus A \to \mathbb{R}$, $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

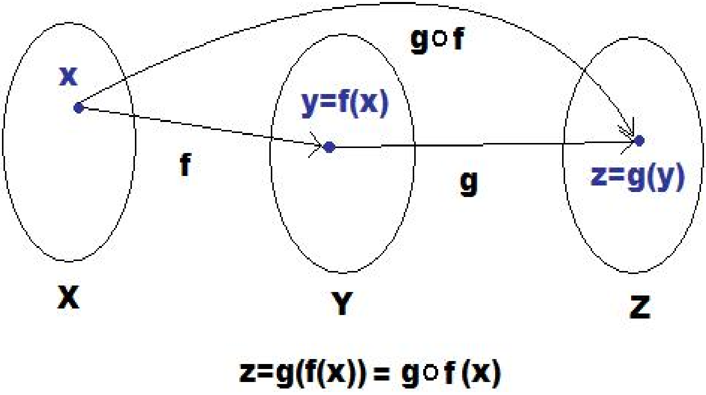
Złożenie funkcji

Dodatkowo, na funkcjach możemy przeprowadzić jeszcze jedno działanie: składanie.

Złożenie funkcji

Niech $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$. Wtedy funkcja $h : X \to Z$ dana wzorem $h(x) = g(f(x))$ nazywa się *złożeniem* funkcji f i g. Oznaczamy $h = g \circ f$. f jest nazywana funkcją *wewnętrzną*, a g funkcją *zewnętrzną* takiego złożenia.

Złożenie funkcji - ilustracja



Składanie funkcji - przykład

Załóżmy, że mamy dane dwie funkcje: $f(x) = 1 - x$ i $g(x) = x^2$.
Wtedy $g(f(x)) = g(1-x) = (1-x)^2$. Zatem $g \circ f(x) = (1-x)^2$.
Możemy też wykonać złożenie w przeciwną stronę:
$f(g(x)) = f(x^2) = 1 - x^2$. Zatem $f \circ g(x) = 1 - x^2$.
Jak widać na powyższym przykładzie, składanie funkcji NIE JEST przemienne.
W szczególności, $g \circ f(-1) = 2^2 = 4$, a $f \circ g(-1) = 1 - 1 = 0$.

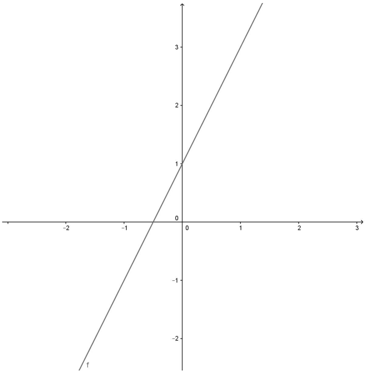
Surjekcja

Surjekcja

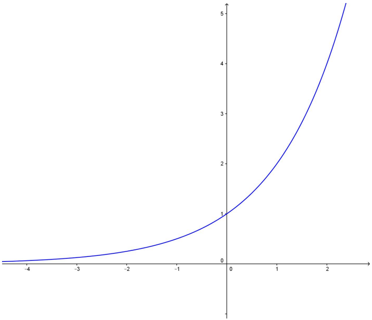
Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy surjekcją, jeśli przeciwdziedzina tej funkcji jest równa zbiorowi wartości tj. $\forall_{y \in Y} \exists_{x \in X} : f(x) = y$.

Surjekcjami na $\mathbb{R}$ są zawsze wielomiany nieparzystego stopnia. Każdą funkcję dość łatwo przekształcić w surjekcję - odpowiednio zmniejszając jej przeciwdziedzinę.

Surjekcje - przykład



$f(x) = 2x + 1$ jest surjekcją
jako $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



$g(x) = 2^x$ nie jest surjekcją
jako $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ale może być
jako $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$

Bijekcja

Bijekcja

Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy *wzajemnie jednoznaczną* lub *bijekcją*, jeśli jest injekcją i surjekcją.

Bijekcjami na swojej dziedzinie i zbiorze wartości są wszelkie funkcje monotoniczne np. funkcje wykładnicze. Jeśli $X = Y$ jest zbiorem skończonym, to bijekcję $f : X \to X$ nazywamy permutacją. Permutację można interpretować jako przestawienie kolejności elementów zbioru.

Funkcja odwrotna do danej

Funkcja odwrotna do danej

Dla bijekcji $f : X \to Y$ definiujemy jej *funkcję odwrotną* $f^{-1} : Y \to X$ następująco: $f^{-1}(y) = x$, gdzie x jest takie, że $f(x) = y$. Jest to jedyna funkcja taka, że $f \circ f^{-1} = id_Y$, $f^{-1} \circ f = id_X$. Każdą funkcję, która posiada funkcję odwrotną nazywamy *odwracalną*.

Gdyby f nie była injekcją, to definicja funkcji odwrotnej nie byłaby jednoznaczna dla niektórych punktów Y. Gdyby nie była surjekcją, to funkcja f^{-1} nie byłaby określona na całym Y.

Typowe rzeczywiste funkcje odwrotne do siebie

Na tym slajdzie nie precyzuję dziedziny i przeciwdziedziny - to łatwo uzupełnić.

- Dodawanie i odejmowanie tej samej liczby. $f(x) = x + a$ i $g(x) = x - a$ są funkcjami wzajemnie odwrotnymi dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$, bo $(x + a) - a = (x - a) + a = x$.
- Potęgowanie i pierwiastkowanie z tym samym wykładnikiem: $f(x) = x^a$ i $g(x) = \sqrt[a]{x}$ są funkcjami wzajemnie odwrotnymi dla $a > 0$ i odpowiednio dobranych dziedzin ($\mathbb{R}_+$), bo $\sqrt[a]{x^a} = (\sqrt[a]{x})^a = x$.
- Funkcje wykładnicze i logarytmiczne o tych samych podstawach: $f(x) = a^x$ i $g(x) = \log_a x$ są funkcjami wzajemnie odwrotnymi dla $a > 0$ i odpowiednio dobranych dziedzin (ćwiczenie), bo $a^{\log_a x} = \log_a(a^x) = x$.

Odwracanie funkcji - procedura

Powiedzmy, że mamy funkcję daną wzorem $f(x) = \ldots$. Jak znaleźć wzór funkcji odwrotnej do niej?
Zalecana procedura jest następująca:

- W formule wyjściowej zamieniamy miejscami x i $f(x)$, a zamiast $f(x)$ piszemy $f^{-1}(x)$ (albo y, żeby nie mieć zbyt skomplikowanych symboli w równaniu).
- Powstałe równanie rozwiązujemy tak, by obliczyć $f^{-1}(x)$ (lub y, które na końcu zamieniamy w $f^{-1}(x)$).
- To, co wyszło, jest wzorem funkcji odwrotnej.

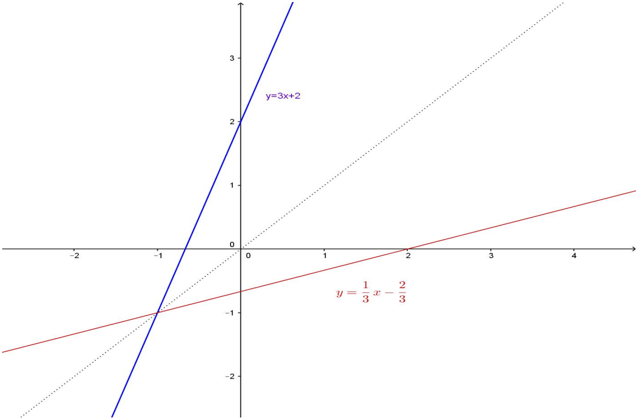
Odwracanie funkcji - przykład

Powiedzmy, że mamy funkcję rzeczywistą daną wzorem
$f(x) = 3x + 2$.
Zapisujemy $x = 3f^{-1}(x) + 2$ i, dla uproszczenia, podstawiamy
$y = f^{-1}(x)$, otrzymując $x = 3y + 2$.
Rozwiązujemy ze względu na y:

$$x = 3y + 2 \Rightarrow x - 2 = 3y \Rightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}.$$

Zatem $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$.

Wykresy funkcji odwrotnych



Wykresy funkcji odwrotnych

Wykresy wzajemnie odwrotnych funkcji rzeczywistych są symetryczne względem prostej $y = x$.

Dodatkowe twierdzenia

Zasada buta i skarpetki

Jeśli funkcje $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$ są odwracalne, to $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Odwrotność i monotoniczność

Jeśli funkcja $f : X \to Y$ jest funkcją rosnącą (malejącą) i odwracalną, to $f^{-1} : Y \to X$ również jest funkcją rosnącą (malejącą).

Na zbiorach dyskretnych

W ramach tego kursu częściej będziemy zajmować się funkcjami na zbiorach dyskretnych, a ich odwracanie przyda się na podstawach kryptologii. Przykład:

$$A = \{a, b, c\};\ B = \{\alpha, \beta, \gamma\}.$$

Niech $f : A \to B$ będzie zdefiniowane: $f(a) = \alpha$, $f(b) = \gamma$, $f(c) = \beta$. f jest bijekcją, więc możemy stworzyć funkcję odwrotną $f^{-1} : B \to A$, którą można zdefiniować jako $f^{-1}(\alpha) = a$, $f^{-1}(\beta) = c$ i $f^{-1}(\gamma) = b$.

Na zbiorach dyskretnych

Przykład:

$$A = \{a, b, c\};\ B = \{\alpha, \beta, \gamma\}.$$

Niech $g : A \to B$ będzie zdefiniowane: $g(a) = \alpha$, $g(b) = \gamma$, $g(c) = \gamma$. g nie jest funkcją różnowartościową i nie da się jej odwrócić, bo nieznane byłyby wartości $g^{-1}(\beta)$ (dlatego konieczna jest surjektywność) i $g^{-1}(\gamma)$ (dlatego konieczna jest różnowartościowość).

Na zbiorach dyskretnych

Żeby bijekcja między zbiorami skończonymi istniała, zbiory te muszą mieć tę samą liczbę elementów. Na przykład:

$$A = \{a, b, c\};\ \ C = \{1, 2, 3, 4\}.$$

W takiej sytuacji nie istnieje bijekcja ani z A w C, ani z C w A. Dokładniej, nie istnieje surjekcja z A w C i nie istnieje injekcja z C w A.