1c. Izomorfizmy grafów

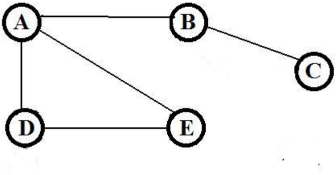
Grzegorz Kosiorowski

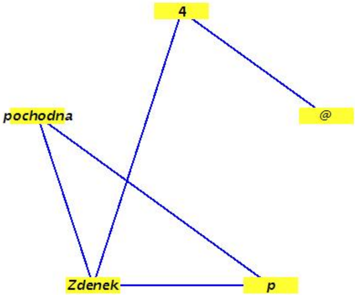
Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

Grafy izomorficzne - motywacja

Grafy często utożsamiamy z ich rysunkami. W praktycznych zastosowaniach, ważne jest też nadanie właściwych nazw wierzchołkom (a czasem i krawędziom), czyli poetykietowanie grafu. Jednak sposób narysowania grafu i nadania jego wierzchołkom etykiet nie wpływa na podstawową strukturę grafu. Jeśli badamy zjawiska z zakresu teorii grafów, a nie ich interpretacje, grafy, które różnią się tylko rysunkiem i opisem wierzchołków i krawędzi są dla nas takie same, a formalnie mówimy o nich: *izomorficzne*.
Generalnie, grafów izomorficznych nie będziemy traktować jako różnych od siebie. Jednak czasem nie jest łatwo zauważyć, czy dane dwa grafy są izomorficzne, czy nie. W ogólnym przypadku to jest bardzo trudne do stwierdzenia, natomiast ta prezentacja powinna nam pomóc rozstrzygnąć zagadnienie izomorficzności w prostych sytuacjach.

Grafy izomorficzne - przykład





Zauważmy, że te dwa grafy (z matematycznego punktu widzenia) są takie same - różnią się tylko nazwami wierzchołków (A-Zdenek, B-4, C-@, D-pochodna, E-p) i sposobem narysowania. Ich struktura, czyli liczba wierzchołków i połączenia między nimi są te same.

Grafy izomorficzne - formalizacja

Grafy izomorficzne

Dwa grafy ogólne G i H nazywamy *izomorficznymi* jeśli istnieje bijekcja (czyli odwzorowanie „jeden do jednego") $\psi : V(G) \longrightarrow V(H)$ zachowująca sąsiedztwo wierzchołków, czyli taka, że liczba krawędzi łączących wierzchołki u i v w grafie G jest taka sama jak liczba krawędzi łączących wierzchołki $\psi(u)$ i $\psi(v)$ w grafie H. Bijekcję tę nazywamy izomorfizmem. Izomorficzność grafów G i H zapisujemy $G \simeq H$.

Grafy izomorficzne - formalizacja dla grafów skierowanych

Izomorficzne grafy skierowane

Dwa grafy skierowane G i H nazywamy *izomorficznymi* jeśli istnieje bijekcja (czyli odwzorowanie „jeden do jednego") $\psi : V(G) \longrightarrow V(H)$ zachowująca orientację krawędzi między wierzchołka, czyli taka, że liczba krawędzi prowadzących z wierzchołka u do wierzchołka v w grafie G jest taka sama jak liczba krawędzi prowadzących z wierzchołka $\psi(u)$ do $\psi(v)$ w grafie H. Bijekcję tę nazywamy izomorfizmem. Izomorficzność grafów skierowanych G i H zapisujemy $G \simeq H$.

W dalszych slajdach skupimy się na izomorficzności grafów nieskierowanych, ale metody dla grafów skierowanych są analogiczne.

Niezmienniki izomorfizmu - idea

W jaki sposób wykazać, że dwa grafy, które mogą być narysowane w sposób bardzo skomplikowany, są w istocie różne, czyli nieizomorficzne? Najczęściej używanym narzędziem są tak zwane **niezmienniki izomorfizmu**, czyli pewne cechy grafów, które nie zależą od etykietowania wierzchołków i krawędzi, oraz od sposobu ich narysowania. W rezultacie, każde dwa izomorficzne grafy mają wszystkie niezmienniki takie same. (Uwaga! Nie oznacza to, że zgodność jakichkolwiek niezmienników gwarantuje izomorficzność grafu!)
Odwracając powyższe stwierdzenie, otrzymamy podstawowe zastosowanie niezmienników izomorfizmu: jeśli znajdziemy taki niezmiennik, który jest różny dla dwu grafów, takie dwa grafy nie są izomorficzne.

Znane jakościowe niezmienniki izomorfizmu

Jakościowe niezmienniki izomorfizmu, to własności, które każdy graf posiada albo nie. Jeśli grafy są izomorficzne i jeden z nich posiada taką własność, to musi posiadać ją drugi (np. jeśli jeden z grafów jest prosty, to drugi też musi być). Znane przykłady takich niezmienników to:

- „Prostość" czyli bycie grafem prostym.
- Posiadanie drogi prostej lub cyklu o zadanej długości.
- Spójność.
- Acykliczność (w konsekwencji: bycie drzewem).
- n-regularność
- Bycie grafem-cyklem lub grafem-drogą.
- Posiadanie mostu/wierzchołka rozspajającego.

Znane ilościowe niezmienniki izomorfizmu

Ilościowe niezmienniki izomorfizmu, to liczbowe charakterystyki, które potrafimy obliczyć dla grafów. Jeśli grafy są izomorficzne, to ich niezmienniki ilościowe przyjmują te same wartości. Znane przykłady takich niezmienników to:

- Liczba wierzchołków lub liczba krawędzi.
- Liczba pętli lub liczba krawędzi wielokrotnych.
- Liczba dróg prostych lub liczba cykli o zadanej długości
- Liczba składowych spójnych.
- Liczba wierzchołków zadanego stopnia.
- Liczba mostów lub liczba wierzchołków rozspajających.
- Wyznacznik, ślad, wielomian charakterystyczny i wartości własne grafu.

Inne niezmienniki izomorfizmów

W przyszłości poznamy wiele innych własności i charakterystyk grafów, które nie zależą od etykietowania i sposobu rysowania. Jeśli nie będzie wyraźnie napisane inaczej, te własności też są niezmiennikami. Przykłady to:

- Jakościowe: Eulerowskość, posiadanie drogi Eulera, hamiltonowskość, dwudzielność, posiadanie skojarzenia pełnego, liczba drzew spinających...
- Ilościowe: liczba chromatyczna, indeks chromatyczny...

Co nie jest niezmiennikiem izomorfizmu?

Niezmiennikami izomorfizmu **nie są** własności, które zależą od etykietowania (czyli nazywania) wierzchołków lub krawędzi lub sposobu narysowania. Przykładowo, grafy mogą być izomorficzne, mimo, że:

- W pierwszym grafie istnieje wierzchołek nazwany A oraz krawędź nazwana b, a w drugim nie.
- Na rysunku jednego grafu pewne dwie krawędzie się przecinają, a na rysunku drugiego grafu nie.
- Jeden graf jest narysowany na niebiesko, a drugi na czarno.
- Macierze sąsiedztwa i incydencji tych grafów są różne (bo ich wygląd zależy od wyboru kolejności wierzchołków).
- Wektory własne macierzy sąsiedztwa obu grafów są różne.

Do zależności między macierzami grafów a ich izomorficznością jeszcze wrócimy.

Do czego służą niezmienniki?

Następująca informacja jest bardzo ważna:
Badając niezmienniki grafów (i wskazując, że różnią się przynajmniej jednym z nich) możemy wykazać, że pewne grafy nie są izomorficzne.
Jednak **nigdy** za pomocą niezmienników nie wykażemy, że pewne dwa grafy są izomorficzne: możliwe, że wszystkie znane nam niezmienniki dwóch grafów są takie same, ale te grafy nadal nie są izomorficzne - różnią się czymś innym.
Sposobom dowodzenia, że grafy są izomorficzne poświęcimy ostatnie slajdy tej prezentacji. Najpierw jednak zobaczmy kilka przykładów zastosowań niezmienników izomorfizmu.

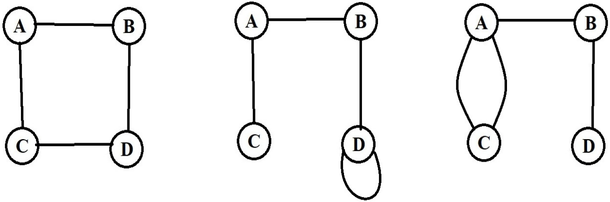
Przykład 1

Te grafy nie są izomorficzne, bo mają różną liczbę krawędzi (choć mają np. tę samą liczbę wierzchołków).

Przykład 2

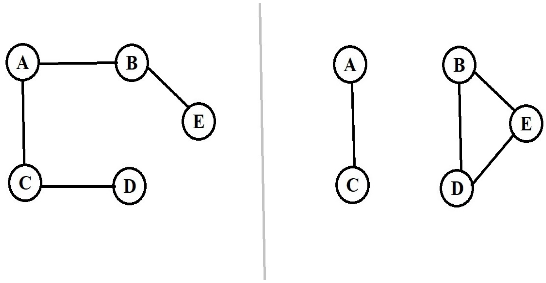
Te grafy nie są izomorficzne, bo mają różną liczbę wierzchołków (choć mają np. tę samą liczbę krawędzi).

Przykład 3



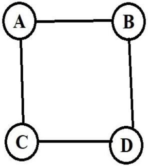
Te grafy nie są izomorficzne, mimo, że mają tę samą liczbę wierzchołków i krawędzi. Graf po lewej jest prosty, graf pośrodku nie ma krawędzi wielokrotnych, ale ma pętlę, graf po prawej ma krawędź wielokrotną, ale nie ma pętli.

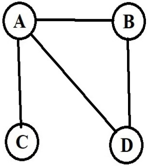
Przykład 4



Te grafy nie są izomorficzne: graf po lewej jest spójny, a graf po prawej nie (ma 2 składowe spójne).

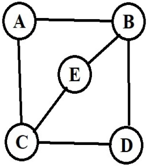
Przykład 5

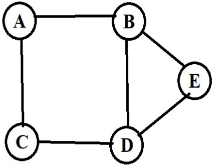




Te grafy nie są izomorficzne, bo liczba wierzchołków danego stopnia jest różna: na przykład graf po lewej nie ma wierzchołków stopnia 1, a graf po prawej ma jeden taki wierzchołek. Z kolei graf po lewej ma 4 wierzchołki stopnia 2, a graf po prawej tylko 2 wierzchołki stopnia 2.

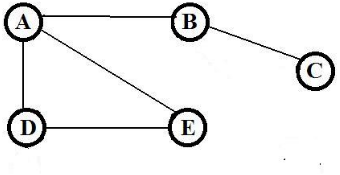
Przykład 6

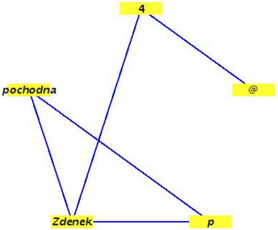




Podstawowe własności i charakterystyki wydają się takie same, ale te grafy też nie są izomorficzne. Na przykład graf po prawej posiada cykl długości 3 (BDE) i cykl długości 5 (ABEDC), a graf po lewej takich cykli nie posiada (ma tylko cykle długości 4). Inna własność: z grafu po lewej można usunąć 2 wierzchołki i krawędzie z nimi sąsiadujące tak (B i C) tak, by graf się rozpadł na 3 składowe spójne, a w grafie po prawej nie da się tak zrobić.

Przykład konstrukcji izomorfizmu





W tym przykładzie zauważyliśmy, że jeśli zdefiniujemy odwzorowanie między wierzchołkami następująco:

x	A	B	C	D	E
$\psi(x)$	Zdenek	4	@	pochodna	p

to ψ będzie izomorfizmem między grafem po lewej, a grafem po prawej. Jednak „zauważenie" izomorfizmu nie jest wiarygodną techniką badania izomorficzności.

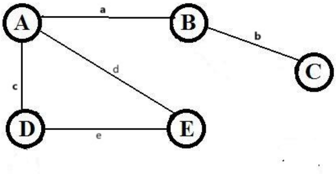
Macierze incydencji i izomorfizmy

Macierz incydencji nie jest niezmiennikiem izomorfizmu, ale dzięki niej możemy uzyskać warunek równoważny na izomorficzność:

Twierdzenie o macierzy incydencji i izomorfizmie

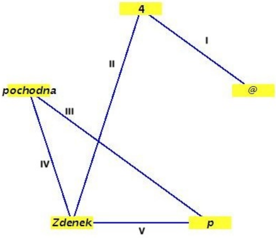
Dwa grafy skierowane lub nieskierowane (w tym drugim przypadku bez pętli) G i H są izomorficzne wtedy i tylko wtedy gdy macierz incydencji $A(H)$ może powstać z macierzy incydencji $A(G)$ za pomocą przestawienia wierszy i kolumn.

Macierze incydencji



$$A(G) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$V(H) = \{4, \text{pochodna}, @, \text{Zdenek}, \text{p}\}$



$$A(H) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Przekształcanie macierzy incydencji

$$A(G) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{w_1 \leftrightarrow w_4}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{k_1 \leftrightarrow k_2, k_4 \leftrightarrow k_5}{\longrightarrow}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{w_1 \leftrightarrow w_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = A(H).$$

Zatem obydwa te grafy są izomorficzne. Śledząc, jakie wiersze zamieniliśmy, możemy nawet w ten sposób skonstruować izomorfizm.

Macierze sąsiedztwa i izomorfizmy

Macierz sąsiedztwa nie jest niezmiennikiem izomorfizmu, natomiast również na jej podstawie da się skonstruować warunek równoważny na izomorficzność, bardziej skomplikowany, ale o wielkich konsekwencjach teoretycznych:

Twierdzenie o macierzy sąsiedztwa i izomorfizmie

Dwa grafy skierowane lub nieskierowane (w tym drugim przypadku bez pętli) G i H są izomorficzne wtedy i tylko wtedy gdy istnieje macierz P taka, że:

$$B(G) = P \cdot B(H) \cdot P^{-1}.$$

Z algebry wiemy, że powyższa równość oznacza identyczność wartości własnych macierzy $B(G)$ i $B(H)$, a co za tym idzie, że wartości własne, wyznacznik (jako ich iloczyn) i ślad (jako ich suma) grafów są niezmiennikami izomorfizmu.