1a. Podstawy logiki matematycznej

Grzegorz Kosiorowski

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

1. Motywacja
2. Zdania i formy zdaniowe
3. Zdania złożone i rachunek zdań
4. Testowanie zdań za pomocą tablic i tautologie
5. Podstawowe prawa logiki

Logika matematyczna

Logika matematyczna:

- Dział matematyki analizujący zasady prowadzenia rozumowań.
- Umożliwia odróżnienie niepoprawnych rozumowań od poprawnych i zrozumienie poprawnego zapisu twierdzeń i definicji matematycznych.
- Jest podstawą działania komputerów i dlatego stosowana jest w językach programowania.
- Ma związek ze sprzętem komputerowym, w szczególności układami i bramkami logicznymi.

Plan działu

- Terminologia i oznaczenia, w tym tablice (matryce) logiczne;
- Rachunek zdań;
- Dowody i ich rodzaje;
- Elementy teorii mnogości i ich związek z logiką;
- Wstęp do teorii układów logicznych.

Zdanie

Zdanie logiczne

Zdanie logiczne to stwierdzenie, któremu można przypisać dokładnie jedną z dwu wartości logicznych: prawda i fałsz (nie obie jednocześnie!). Innymi słowy, to stwierdzenie, które może być prawdziwe lub fałszywe.

W rachunku zdań, zmienne zdaniowe oznaczamy małymi literami: najczęściej p, q, r,...

Przykłady zdań

Przykładowe zdania:

- Napoleon Bonaparte jest prezydentem Polski. (zdanie fałszywe)
- $2 + 2 = 4$. (zdanie prawdziwe)
- Liczba 4 jest dodatnia, a liczba 3 jest ujemna. (zdanie złożone, fałszywe)
- Każda liczba całkowita parzysta większa od 2 jest sumą dwóch liczb pierwszych. (Hipoteza Goldbacha, zdanie, które ma wartość logiczną, choć jej nie znamy)

Kontrprzykłady

Nie są zdaniami (z punktu widzenia logiki):

- Czy pada deszcz? (pytanie, nie ma wartości logicznej)
- Nigdy więcej wojny! (równoważnik zdania, można przetworzyć na zdanie)
- Ucz się! (rozkaz, nie ma wartości logicznej)
- Jeśli nie przestaniesz krzyczeć, wyjdę. (może to być zdanie - zależnie od tego jak dobrze znamy intencje osoby je wypowiadającej, ale bez dodatkowych informacji trudno określić wartość logiczną)
- $x - y = y - x$. (y i x nie są określone, więc nie znamy wartości logicznej. To jest forma zdaniowa)

Zdania niejednoznaczne

Mogą istnieć zdania o niejasnej wartości logicznej, głównie ze względu na brak precyzji sformułowania.

- Studenci są bogaci.
- Dziś jest ciepło.
- Matematyka jest ciekawa.
- Dla wszystkich A, jeśli $A^2 = 0$ to $A = 0$. (Nieokreślony zbiór wszystkich A. Jeśli to są liczby rzeczywiste, zdanie prawdziwe. Jeśli macierze o wartościach rzeczywistych, to nie).

Na kursach związanych z matematyką staramy się ich unikać lub przekształcać w zdania jednoznaczne (i powinno się tak postępować w programowaniu!).

Formy zdaniowe

Często w zagadnieniach matematycznych lub programistycznych pojawiają się sformułowania, które zawierają zmienną i dopiero dodatkowa informacja o tej zmiennej pozwala przekształcić je w zdanie. Nazywamy je **formami zdaniowymi**.

- $x > 0$. (forma zdaniowa zmiennej x)
- Pani A zna pana B. (forma zdaniowa zmiennych A i B)
- n matematyków zna liczbę k, która spełnia zdanie p. (forma zdaniowa zmiennych n, k, p)

W rachunku zdań, formy zdaniowe oznaczamy jak funkcje np. $p(x)$, $q(A, B)$, $\varphi(n, k, p)$.

Formy zdaniowe i kwantyfikatory

Twierdzenia i definicje matematyczne mają często postać form zdaniowych zmienionych w zdanie za pomocą pewnych sformułowań zwanych kwantyfikatorami. Najczęściej używane to:

- Kwantyfikator ogólny odpowiadający sformułowaniu: „dla każdego". Oznacza się go znakiem $\forall$. Przykładowo $\forall_{x \in \mathbb{R}}\ x^2 \geqslant 0$. Zdania typu $\forall_{x \in X} p(x)$ są prawdziwe tylko gdy wszystkie zdania $p(x)$ po podstawieniu dowolnego x ze zbioru X są prawdziwe.
- Kwantyfikator szczegółowy odpowiadający sformułowaniu: „istnieje". Oznacza się go znakiem $\exists$. Przykładowo $\exists_{x \in \mathbb{R}}\ x < 0$. Zdania typu $\exists_{x \in X} p(x)$ są prawdziwe tylko gdy choć jedno zdanie $p(x)$ po podstawieniu dowolnego x ze zbioru X jest prawdziwe.

Istnieją też inne kwantyfikatory (np. $\exists!$ oznaczający „istnieje dokładnie jeden"), ale nie będziemy się nimi zajmować na tym kursie.

Przykłady

- X zdał matematykę na pierwszym semestrze. (Forma zdaniowa zmiennej X)
- Dla każdego X ze zbioru studentów pierwszego roku ($\forall_{X \in S}$, gdy S jest zbiorem studentów pierwszego roku), X zdał matematykę na pierwszym semestrze. (zdanie zazwyczaj fałszywe)
- Istnieje X ze zbioru studentów pierwszego roku ($\exists_{X \in S}$, gdy S jest zbiorem studentów pierwszego roku), taki, że X zdał matematykę na pierwszym semestrze. (zdanie zazwyczaj prawdziwe)
- $\forall_{n \in \mathbb{Z}, n > 1} \exists_{p_1, p_2 \in \mathfrak{P}}\ 2n = p_1 + p_2$. (Hipoteza Goldbacha, zapis skrócony)

Kwantyfikatory czasem opuszczamy, jeśli są oczywiste. Np. prawo przemienności dodawania liczb rzeczywistych zapisujemy $x + y = y + x$, choć formalnie powinno być zapisane $\forall_{x,y \in \mathbb{R}}\ x + y = y + x$.

Dowody i kontrprzykłady

Podstawowa koncepcja: aby coś uznać za prawdę (lub fałsz), należy przedstawić ścisły dowód, że tak właśnie jest (lub, że tak nie jest). Twierdzenia są często postaci $\forall_{x \in X} p(x)$.

- Jeśli $\forall_{x \in X} p(x)$ ma być twierdzeniem, to musi być udowodnione, że $p(x)$ jest prawdziwe dla każdego x. Nie wystarczy sprawdzić kilku (ani kilku miliardów) przykładów, by zdecydować, że tak jest. Hipoteza Goldbacha jest sprawdzona dla liczb rzędu 10^{17} i mniejszych, ale to nie wystarcza by dowieść jej prawdziwości.
- Natomiast wystarczy wykazać fałsz jednego zdania typu $p(x)$, by twierdzenie $\forall_{x \in X} p(x)$ było fałszywe. Takie zdanie nazywa się **kontrprzykładem**.
- Zdanie: *Każda liczba naturalna jest mniejsza niż miliard* ($\forall_{n \in \mathbb{N}}\ n < 10^9$) jest prawdziwe dla miliarda pierwszych przykładów. Ale np. liczba $n = 10^9 + 1$ jest kontrprzykładem, więc to nie jest prawda.

Funktory logiczne

Określanie prawdy lub fałszu prostego zdania to zagadnienie spoza zakresu zainteresowań logiki. Teraz zajmiemy się głównie oceną prawdziwości skomplikowanych, złożonych zdań, przy założeniu, że jesteśmy w stanie określić prawdziwość ich zdań składowych. Tym zajmuje się tak zwany „rachunek zdań".
Zdania złożone powstają z prostych za pomocą *funktorów*, czyli „działań" na zbiorze zdań, które można interpretować jako spójniki między zdaniami. Podstawowymi funktorami, z których powstają wszystkie inne są: negacja (*nie-*), koniunkcja (*i*), alternatywa (*lub*), implikacja (*Jeżeli..., to*), równoważność (*wtedy i tylko wtedy, gdy*).
We wszystkich naszych obliczeniach używamy następujących oznaczeń logicznych: 1 oznacza prawdę, a 0 fałsz.

Tablice logiczne

Tablice (lub *matryce*) *logiczne* to podstawowe narzędzie rachunku zdań - zarówno służące defininiowaniu funktorów jak i rozstrzyganiu prawdziwości złożeń).

Tablica logiczna

Tablicą lub matrycą logiczną zdania złożonego zbudowanego ze zdań prostych nazywamy tablicę podającą wartości tego zdania złożonego w zależności od wartości logicznej zdań składowych. Wartość całego zdania obliczamy, wyznaczając kolejno wartości zdań prostszych.

Negacja

Jedyny z podstawowych funktorów, który operuje tylko na jednym zdaniu. Dla zdania p, zdanie „nieprawda, że p" lub w skrócie „nie-p" nazywamy negacją i oznaczamy przez $\neg p$ lub $\sim p$. Jest ono prawdziwe, gdy wyjściowe zdanie jest fałszywe (i na odwrót), co można przedstawić tablicą:

p	$\sim p$
1	0
0	1

Na przykład, skoro zdanie „2+2=4" jest prawdziwe, to zdanie „Nieprawda, że 2+2=4" lub w skrócie „$2+2\neq 4$" musi być fałszywe.

Koniunkcja

Dla zdań p oraz q, zdanie „p i q" (czyli wstawienie między zdania łącznika „i") nazywamy koniunkcją i oznaczamy przez $p \wedge q$. Koniunkcja jest prawdziwa dokładnie wtedy, gdy obydwa zdania składowe są prawdziwe, co można przedstawić tablicą:

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Na przykład, zdanie „2+2=5 i w tym momencie w Krakowie pada deszcz" jest zawsze fałszywe, niezależnie od stanu pogody, bo pierwsza część tego zdania jest fałszywa.

Alternatywa

Dla zdań p oraz q, zdanie „p lub q" (czyli wstawienie między zdania łącznika „lub") nazywamy alternatywą i oznaczamy przez $p \vee q$. Alternatywa jest prawdziwa dokładnie wtedy, gdy przynajmniej jedno ze zdań składowych jest prawdziwe, co można przedstawić tablicą:

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Na przykład, zdanie „2+2=4 lub w tym momencie w Krakowie pada deszcz" jest zawsze prawdziwe, bo pierwsza część tego zdania jest prawdziwa.

Ciekawostka: Istnieje funktor alternatywy wykluczającej XOR (albo, „lub prawnicze"), prawdziwy gdy dokładnie jedno ze zdań składowych jest prawdziwe.

Implikacja

Dla zdań p oraz q, zdanie „Z p wynika q" albo „Jeżeli p, to q" nazywamy implikacją i oznaczamy przez $p \Rightarrow q$. Implikacja jest prawdziwa wtedy, gdy zdanie p jest fałszywe lub zdanie q jest prawdziwe, co można przedstawić tablicą:

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Można powiedzieć, że implikacja jest najważniejszym funktorem dla matematyków, bo postać implikacji najczęściej mają twierdzenia (Np. „Jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta prostokątnego (c - przeciwprostokątnej), to $a^2 + b^2 = c^2$"), a ich dowody to tak naprawdę ciągi implikacji.

Implikacja

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Można powiedzieć, że implikacja jest najważniejszym funktorem dla matematyków, bo postać implikacji najczęściej mają twierdzenia (Np. „Jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta prostokątnego (c - przeciwprostokątnej), to $a^2 + b^2 = c^2$"), a ich dowody to tak naprawdę ciągi implikacji. Dlatego często zdanie p w implikacji $p \Rightarrow q$ jest nazywane *założeniem*, a zdanie q *tezą*. q jest też nazywane *warunkiem koniecznym*, by zachodziło p, a p *warunkiem wystarczającym*, by zachodziło q.

Implikacja

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Implikacja może być nieintuicyjna: dlaczego prawdziwym jest, że z dowolnego fałszu wynika dowolna prawda i że z dowolnego fałszu wynika dowolny fałsz? Warto interpretować to następująco: zajmujemy się nie prawdziwością jakiegokolwiek zdania składowego, ale procesu rozumowania prowadzącego z założenia do tezy. Jeśli rozpoczynamy od fałszywego założenia to poprawne rozumowanie może nas doprowadzić gdziekolwiek - do tezy prawdziwej lub fałszywej.

Implikacja - przykład

Przykładowo, założeniem niech będzie $1 = 2$ (oczywiście, założenie fałszywe). Zgodnie z prawami arytmetyki obie strony prawdziwej równości można przemnożyć przez tę samą liczbę rzeczywistą, otrzymując również prawdziwą równość. Mnożąc startowe równanie stronami przez 2 otrzymamy $2 = 4$. Rozumowanie jest poprawne, dlatego implikacja $1 = 2 \Rightarrow 2 = 4$ jest prawdziwa, mimo, że obydwa zdania składowe są fałszywe.
Rozpoczynając od tego samego założenia, możemy też obydwie strony startowej równości pomnożyć przez 0. Otrzymamy wtedy $0 = 0$, co jest prawdą. Zatem startując od fałszywej przesłanki można dojśc do prawdziwej, gdyż rozumowanie było poprawne i $1 = 2 \Rightarrow 0 = 0$.

Równoważność

Dla zdań p oraz q, zdanie „p jest równoważne q” albo „p wtedy i tylko wtedy, gdy q” nazywamy równoważnością i oznaczamy przez $p \Leftrightarrow q$. Równoważność jest prawdziwa dokładnie wtedy, gdy obydwa zdania mają tę samą wartość logiczną, co można przedstawić tablicą:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Twierdzenia mają też często postać równoważności, gdyż de facto równoważność jest „implikacją w obie strony”.

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)].$$

Analiza prawdziwości zdań

Znając już podstawowe funktory logiczne, możemy analizować za pomocą tablic logicznych prawdziwość zdań złożonych. Powiedzmy, że chcemy zbadać, dla jakich wartości logicznych zdań składowych prawdziwe będzie zdanie:

Zadanie

Jeżeli Aurora dobrze gra w szachy, to jest mądra, a jeżeli nie jest mądra lub zna język suahili, to nie gra dobrze w szachy.

Zaczynamy od identyfikacji podstawowych zdań składowych, których prawdziwość poznać możemy tylko narzędziami spoza dziedziny logiki i których nie da się rozbić na zdania prostsze. Tutaj mamy trzy takie zdania: „Aurora dobrze gra w szachy" (odtąd oznaczane jako p), „Aurora jest mądra" (będziemy to oznaczać je q) i „Aurora zna język suahili"(oznaczone jako r).

Analiza prawdziwości zdań

Zadanie

Jeżeli Aurora dobrze gra w szachy, to jest mądra, a jeżeli nie jest mądra lub zna język suahili, to nie gra dobrze w szachy.

Wykorzystując oznaczenia $p =$ „Aurora dobrze gra w szachy”, $q =$ „Aurora jest mądra” $r =$ „Aurora zna język suahili” możemy formalnie zapisać to zdanie jako:

$$(p \Rightarrow q) \wedge \left[((\sim q) \vee r) \Rightarrow (\sim p)\right].$$

Prawdziwość tego zdania sprawdzimy za pomocą tablicy logicznej.

Analiza prawdziwości zdań

$$(p \Rightarrow q) \wedge [((\sim q) \vee r) \Rightarrow (\sim p)] .$$

Najpierw wypisujemy wszystkie możliwości (jest ich 2^n, gdzie n jest liczbą zdań podstawowych).

p	q	r
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1
0	0	0

Analiza prawdziwości zdań

$(p \Rightarrow q) \wedge [((\sim q) \vee r) \Rightarrow (\sim p)]$.
Głównym łącznikiem (czyli funktorem, który wykonujemy jako ostatni) jest $\wedge$, więc najpierw wyznaczamy wartość logiczną zdania na lewo od niego.

p	q	r	$p \Rightarrow q$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	1

Analiza prawdziwości zdań

$(p \Rightarrow q) \wedge [((\sim q) \vee r) \Rightarrow (\sim p)]$.

Następnie wyznaczamy kolejno wartości jak najprostszych zdań złożonych po prawej stronie (i dla skrócenia zapisujemy $p \Rightarrow q$ jako L, czyli lewą stronę głównego zdania) :

p	q	r	L	$(\sim q)$	$(\sim p)$	$(\sim q) \vee r$
1	1	1	1	0	0	1
1	1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0
0	0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1

Analiza prawdziwości zdań

$(p \Rightarrow q) \wedge [((\sim q) \vee r) \Rightarrow (\sim p)]$.

Jesteśmy teraz gotowi do wyznaczenia prawdziwości całego zdania po prawej od $\wedge$, czyli $((\sim q) \vee r) \Rightarrow (\sim p)$ (w tabeli w skrócie oznaczymy to zdanie jako P).

p	q	r	L	$(\sim q)$	$(\sim p)$	$(\sim q) \vee r$	P
1	1	1	1	0	0	1	0
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0	1	0
0	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

Analiza prawdziwości zdań

$(p \Rightarrow q) \wedge [((\sim q) \vee r) \Rightarrow (\sim p)]$.
I wreszcie w ostatniej kolumnie tabeli otrzymujemy prawdziwość całego zdania, korzystając z kolumn L, P i wiedzy o prawdziwości funktora koniunkcji.

p	q	r	L	$(\sim q)$	$(\sim p)$	$(\sim q) \vee r$	P	$L \wedge P$
1	1	1	1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1	1

Analiza prawdziwości zdań

p	q	r	L	$(\sim q)$	$(\sim p)$	$(\sim q) \vee r$	P	$L \wedge P$
1	1	1	1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1	1

Z matrycy odczytujemy, że całe zdanie jest nieprawdziwe tylko w trzech sytuacjach: gdy wszystkie 3 zdania proste są prawdziwe, gdy prawdziwe są dokładnie zdania p i r oraz gdy prawdziwe jest tylko zdanie p.

Analiza prawdziwości zdań

Z matrycy odczytujemy, że całe zdanie jest nieprawdziwe tylko w trzech sytuacjach: gdy wszystkie 3 zdania proste są prawdziwe, gdy prawdziwe są dokładnie zdania p i r oraz gdy prawdziwe jest tylko zdanie p.
Wracając do naszych oznaczeń: $p =$ „Aurora dobrze gra w szachy", $q =$ „Aurora jest mądra" $r =$ „Aurora zna język suahili", możemy powiedzieć, że całe zdanie wyjściowe jest fałszywe, gdy Aurora dobrze gra w szachy i zna suahili (niezależnie, czy jest mądra, czy nie), a także gdy Aurora dobrze gra w szachy, ale nie jest mądra i nie zna suahili. W innych wypadkach zdanie jest prawdziwe. Reszta badania tego zdania nie zależy od logiki: musimy z innych źródeł poznać prawdziwość „zdań podstawowych".

Tautologia i zdanie sprzeczne

Wyrażenie logiczne zbadane w tabeli logicznej na poprzednich slajdach miało różną wartość logiczną w zależności od prawdziwości zdań składowych (p, q i r). Nie zawsze tak jest.

Tautologia

Tautologią nazywamy zdanie złożone, które są zawsze prawdziwe, niezależnie od prawdziwości jego zdań składowych.

Tautologię w praktyce można poznać po tym, że w kolumnie wyniku tablicy logicznej tautologii pojawiają się same jedynki.

Zdanie sprzeczne

Zdaniem sprzecznym nazywamy zdanie złożone, które są zawsze fałszywe, niezależnie od prawdziwości jego zdań składowych.

Oczywiście, jeśli p jest tautologią to $\sim p$ jest zdaniem sprzecznym (i na odwrót).

Tautologia i zdanie sprzeczne - przykłady

Proste tautologie, zwane prawami logiki, są szczególnie przydatne, gdyż można ich używać jako elementów rozumowań, za pomocą których rozstrzygamy o prawdziwości bardziej skomplikowanych zdań. Klasyczną tautologią jest $p \vee (\sim p)$. Łatwo można to sprawdzić tabelą:

p	$\sim p$	$p \vee (\sim p)$
1	0	1
0	1	1

Klasycznym zdaniem sprzecznym jest $p \wedge (\sim p)$ (do samodzielnego sprawdzenia).

Podstawowe prawa logiki

Na kolejnych slajdach zajmiemy się podstawowymi prawami logiki, czyli tautologiami najczęściej używanymi przy konstruowaniu dowodów i analizie rozumowań. Prawdziwość każdego z nich można sprawdzić metodą matrycy logicznej. Jest ich mnóstwo, wskażemy tylko najbardziej znane i przydatne:

Prawa idempotentności i identyczności

$p \vee p \Leftrightarrow p$; $p \wedge p \Leftrightarrow p$;
$p \vee 1 \Leftrightarrow 1$; $p \vee 0 \Leftrightarrow p$; $p \wedge 0 \Leftrightarrow 0$; $p \wedge 1 \Leftrightarrow p$.

Przez 1 oznaczam tu zdanie zawsze prawdziwe, a przez 0 zdanie zawsze fałszywe.

Prawa przemienności i łączności

Prawa przemienności i łączności

$(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$; $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$; $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$;
$[(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$; $[(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$.

Prawa przemienności mówią, że nie ma znaczenia kolejność zdań w alternatywie, koniunkcji i równoważności (ma w implikacji!), a prawa łączności, że serie tylko koniunkcji albo tylko alternatyw można odczytywać w dowolnej kolejności (więc nie ma sensu ich nawiasować).

Prawo kontrapozycji i inne transformacje implikacji

Prawo kontrapozycji

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$.

$(\sim q \Rightarrow \sim p)$ jest nazywane **zdaniem przeciwstawnym** lub **kontrapozycją** zdania $(p \Rightarrow q)$ i jest tak samo prawdziwe. Na tym fakcie oparte są tak zwane „dowody nie wprost".
Zdanie $q \Rightarrow p$ jest nazywane **zdaniem odwrotnym** do $(p \Rightarrow q)$ i, podobnie jak jego kontrapozycja $(\sim p \Rightarrow \sim q)$, może mieć inną wartość logiczną od zdania wyjściowego.

Kontrapozycja i zdanie odwrotne - przykład

Powiedzmy, że rozważamy implikację „Jeżeli pada deszcz, to na niebie są chmury". Kontrapozycją (równie prawdziwą) jest zdanie: „Jeśli na niebie nie ma chmur, to nie pada deszcz".
Zdaniem odwrotnym byłoby „Jeżeli na niebie są chmury, to pada deszcz", a jego kontrapozycją: „Jeżeli nie pada deszcz, to na niebie nie ma chmur". Ostatnie dwa zdania nie są równoważne dwu pierwszym.

Reductio ad absurdum

Ważną techniką dowodzenia jest „sprowadzanie do sprzeczności” w logice nazywane:

Reductio ad absurdum

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(p \wedge \sim q) \Rightarrow 0]$.

Zamiast dowodzić, że z założenia wynika teza, można rozważyć, co by się działo gdyby założenie zachodziło, a teza nie i wskazać, że w takiej sytuacji zachodziłoby jakieś zdanie ewidentnie fałszywe (przykład później).

Prawa zaprzeczeń

Prawo podwójnego przeczenia

$\sim (\sim p) \Leftrightarrow p.$

Prawa de Morgana

$\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q);$
$\sim (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q).$

Prawa de Morgana mówią, że gdy chcemy podać zaprzeczenie zdania będącego koniunkcją lub alternatywą, musimy nie tylko zaprzeczyć zdania składowe, ale też koniunkcję zastąpić alternatywą, a alternatywę koniunkcją.

Prawa zaprzeczeń

Prawo zaprzeczenia implikacji

$\sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge (\sim q)).$

Zaprzeczenie równoważności jest na tyle skomplikowane, że nie traktuję go jako głównego prawa logiki, ale dojście do niego jest proste, jeśli wykorzystamy dotychczasowe prawa, pokazując przykład klasycznego rachunku zdań (czyli przekształceń zdań za pomocą praw logiki). Wiemy, że
$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)].$

Przykład rachunku zdań

$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$.
Zatem, żeby zaprzeczyć równoważność, musimy zaprzeczyć koniunkcję dwoch implikacji, a do tego wystarczą dotychczasowe prawa zaprzeczeń:

$$\sim [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)] \Leftrightarrow [\sim (p \Rightarrow q) \vee \sim (q \Rightarrow p)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [(p \wedge (\sim q)) \vee (q \wedge (\sim p))].$$

Przykład rachunku zdań

Stąd moglibyśmy zapisać ogólne prawo:

$$\sim (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \wedge (\sim q)) \vee (q \wedge (\sim p))].$$

W tym „dowodzie” ukryliśmy naturalne wykorzystanie najważniejszego, a niewymienionego jeszcze prawa logiki.

Prawo przechodniości implikacji i równoważności

Prawo przechodniości implikacji i równoważności

$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$;
$[(p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r)] \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$.

Prawa te są o tyle ważne, że opierają się na nich wszelkie dowody matematyczne (jak ten na poprzednim slajdzie). Dowody twierdzeń działają jak ciągi równości: z założenia wynika jakiś fakt, z tego drugi, następnie trzeci... i tak otrzymujemy ciąg implikacji, który kończy się tezą: $z \Rightarrow p_1 \Rightarrow p_2 \ldots \Rightarrow p_n \Rightarrow t$ (czasem te implikacje są równoważnościami). Dzięki prawu przechodniości implikacji i równoważności, takie dowody są prawidłowe.

Prawa przemienności kwantyfikatorów

Prawa przemienności kwantyfikatorów

$\forall_x \forall_y \varphi(x, y) \Leftrightarrow \forall_y \forall_x \varphi(x, y)$;
$\exists_x \exists_y \varphi(x, y) \Leftrightarrow \exists_y \exists_x \varphi(x, y)$;
$\exists_y \forall_x \varphi(x, y) \Rightarrow \forall_x \exists_y \varphi(x, y)$.

Prawa te oznaczają, że kwantyfikatory można w trakcie rozumowania dowolnie przestawiać kolejnością, o ile są takie same (tj. wszystkie ogólne lub wszystkie szczegółowe), natomiast trzeba uważać, gdy są różne (bo w trzecim prawie jest tylko implikacja).

Prawa przemienności kwantyfikatorów

Częściowa przemienność kwantyfikatorów

$\exists_y \forall_x \varphi(x, y) \Rightarrow \forall_x \exists_y \varphi(x, y)$.

To ostatnie prawo najlepiej zapamiętać na przykładzie: jeśli zdanie $\varphi(x, y)$ oznacza: „Para butów y pasuje na człowieka x" to oczywiście, sytuacja, że istnieje para butów pasująca na każdego człowieka jest dużo mniej prawdopodobna, niż że dla każdego człowieka istnieje para butów, która na niego pasuje - dlatego te zdania nie są równoważne. Dokładniej mówiąc, jeśli zachodzi ta pierwsza sytuacja oznacza, że każdy człowiek ma pasującą parę butów, na przykład tę uniwersalną. Natomiast przykład na nieprawdziwość implikacji odwrotnej, to rzeczywistość: dla każdego da się zrobić pasującą parę butów, ale jedna para butów pasująca na wszystkich ludzi raczej nie istnieje.

Prawa zaprzeczania kwantyfikatorów

$\sim \forall_x \varphi(x) \Leftrightarrow \exists_x \sim \varphi(x)$;
$\sim \exists_x \varphi(x) \Leftrightarrow \forall_x \sim \varphi(x)$;

Jeśli chcemy zaprzeczyć zdanie zawierające kwantyfikator, to nie tylko musimy zaprzeczyć formę zdaniową pod kwantyfikatorem, ale sam kwantyfikator się zmienia: jeśli przed zaprzeczeniem był ogólnym, to po zaprzeczeniu będzie szczegółowym (i na odwrót).

Prawa zaprzeczania kwantyfikatorów

Prawa zaprzeczania kwantyfikatorów

$\sim \forall_x \varphi(x) \Leftrightarrow \exists_x \sim \varphi(x)$;
$\sim \exists_x \varphi(x) \Leftrightarrow \forall_x \sim \varphi(x)$;

Przykładowo, chcąc pokazać, że nieprawdą jest zdanie „Wszystkie krowy są czarne" możemy udowodnić, że „Istnieje krowa, która nie jest czarna", po prostu taką wskazując. Ale chcąc udowodnić, że nieprawdziwe jest zdanie „Istnieje liczba podzielna przez 4, która nie jest parzysta", nie wystarczy wskazać jeden przykład, ale trzeba udowodnić, że „Każda liczba podzielna przez 4 jest parzysta".

Zaprzeczanie kwantyfikatorów - przykład

Zadanie

Zaprzeczyć zdanie:

$$\exists_{x\in\mathbb{R}}\forall_{y\in\mathbb{N}}\exists_{\alpha>0}\ \ (2x^2+y^2=\alpha\Rightarrow x>y+\alpha).$$

Po pierwsze, wszystkie kwantyfikatory musimy zamienić na „przeciwne”, otrzymując: $\forall_{x\in\mathbb{R}}\exists_{y\in\mathbb{N}}\forall_{\alpha>0}$. Po drugie, trzeba zaprzeczyć samą formę zdaniową pod kwantyfikatorem (która jest implikacją). W sumie otrzymujemy:

$$\forall_{x\in\mathbb{R}}\exists_{y\in\mathbb{N}}\forall_{\alpha>0}(2x^2+y^2=\alpha\wedge x\leqslant y+\alpha).$$