3c. Kolorowania grafów

Grzegorz Kosiorowski

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

Zastrzeżenie

W tej prezentacji będziemy się zajmować tylko grafami spójnymi, nieskierowanymi i bez wag (choć poszczególne pojęcia można uogólnić na wszystkie grafy, jednak te uogólnienia nie niosą ze sobą nic szczególnie ciekawego).

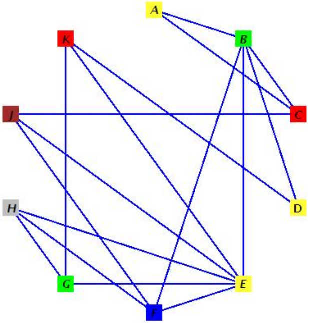
Kolorowanie wierzchołkowe - definicja

Kolorowanie wierzchołkowe

Kolorowaniem wierzchołkowym nazywamy każde przyporządkowanie wierzchołkom kolorów (lub innych etykiet), w którym żadne dwa sąsiednie wierzchołki nie są „pokolorowane” tak samo.
Formalnie, dla grafu prostego $G = (V, E)$ i zbioru skończonego K (kolorów) *kolorowaniem wierzchołkowym* (lub po prostu *kolorowaniem grafu*) nazywamy dowolną funkcję $c : V \to K$ taką, że $c(v) \neq c(w)$ o ile $vw \in E$.

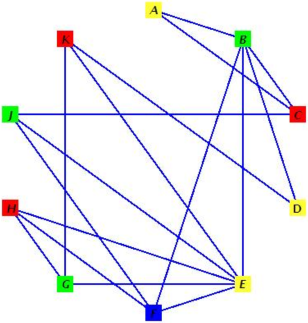
Inaczej, kolorowanie wierzchołków grafu to jego podział na rozłączne antykliki (każdy zbiór wierzchołków pokolorowanych tym samym kolorem nie ma połączeń między sobą, więc jest antykliką).
Najciekawszym problemem związanym z kolorowaniem grafu jest znalezienie *kolorowania optymalnego*, czyli takiego, które używa jak najmniejszej liczby kolorów.

Kolorowanie wierzchołkowe - przykład



Powyżej przykład kolorowania wierzchołkowego za pomocą sześciu kolorów. Nie jest to oczywiście kolorowanie optymalne.

Kolorowanie wierzchołkowe - przykład



To kolorowanie wymaga tylko 4 kolorów, więc jest lepsze. Czy jednak jest optymalne? I właściwie do czego to się przydaje?

Przykładowe zastosowania

- Załóżmy, że chcemy umieścić w różnych pojemnikach pewne substancje chemiczne tak, by substancje w jednym pojemniku nie reagowały ze sobą. Oznaczamy te substancje jako wierzchołki grafu. Krawędzie pojawiają się pomiędzy substancjami reagującymi ze sobą. Jeśli znajdziemy optymalne kolorowanie wierzchołkowe, to będziemy mogli umieścić substancje „tego samego koloru" w jednym pojemniku (bo nie reagują ze sobą). Ta minimalna liczba kolorów będzie liczbą pojemników, których potrzebujemy.
- Zapraszamy gości na przyjęcie. Niektórzy goście się nie lubią, więc nie chcemy ich sadzać przy jednym stoliku. Wszystkich gości opisujemy jako wierzchołki grafu, krawędzie symbolizują konflikty między nimi. Minimalna liczba kolorów będzie liczbą stolików, których potrzebujemy, by nie sadzać nielubiących się gości przy jednym.

Kolorowanie wierzchołkowe - inne zastosowania

- Wszelkie zagadnienia planowania procesów, w których zadania do wykonania muszą być rozdzielone pomiędzy odpowiednie czasy wykonywania, gdyż niektóre nie mogą być wykonane jednocześnie. Może to być np. przydzielanie kolejnych zadań pracownikom firmy albo fragmentów wykonywanego programu procesorom (w obydwu wypadkach nie można naraz wykonywać dwóch zadań przypisanych jednemu wykonawcy), ewentualnie zadania mogą wymagać tych samych zasobów (sprzętu). W odpowiednim grafie wierzchołki to zadania, krawędzie łączą zadania, które nie mogą być wykonywane jednocześnie. Liczba kolorów w kolorowaniu wierzchołkowym da nam czas wykonania całego procesu (np. zagadnieniem wycieku rejestrów).
- Jako zagadnienia kolorowania wierzchołkowego można zinterpretować wiele zagadek logicznych np. kwadraty łacińskie albo sudoku.

Liczba chromatyczna

Liczba chromatyczna

Liczbą chromatyczną grafu G nazywamy najmniejszą liczbę barw, którą można pokolorować wierzchołki tego grafu, tak by każde dwa sąsiednie były różnych kolorów. Liczbę tę zapisujemy $\chi(G)$. Formalnie, jest to najmniejsza możliwa moc zbioru K z definicji kolorowania wierzchołkowego, taka, że dla tego zbioru funkcja c istnieje.

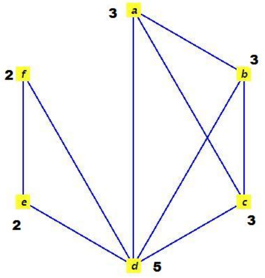
Liczba chromatyczna - przykłady

- Dla antyklik liczba chromatyczna wynosi 1 (to jedyne takie grafy), a dla klik $\chi(K_n) = n$. Jeśli graf G zawiera podgraf, który jest n-kliką, to $\chi(G) \geqslant n$.
- Jeśli H - podgraf G, to $\chi(H) \leqslant \chi(G)$.
- Jeśli G to graf-droga to $\chi(G) = 2$.
- Jeśli G to graf-cykl to $\chi(G) = 2$, jeśli G ma parzystą liczbę wierzchołków i $\chi(G) = 3$, jeśli G ma nieparzystą liczbę wierzchołków.
- Grafy dwudzielne (w tym drzewa) mają liczbę chromatyczną równą 2. Co więcej, graf jest dwudzielny wtedy i tylko wtedy gdy jego liczba chromatyczna jest nie większa niż 2 (patrz - test dwudzielności).
- Graf Petersena ma liczbę chromatyczną równą 3.
- Ogólnie problem dokładnego określenia liczby chromatycznej grafu jest trudny (niewielomianowy). Jednak istnieją dość proste oszacowania z góry tej liczby.

Maksymalny stopień grafu

Maksymalny stopień grafu

Maksymalny stopień grafu G (oznaczony $\Delta(G)$) to największa z liczb $\deg v$, gdzie $v \in V(G)$ (czyli największy możliwy stopień wierzchołka w grafie G).



Stopnie wierzchołków w powyższym grafie G są podpisane. Stąd $\Delta(G) = 5$.

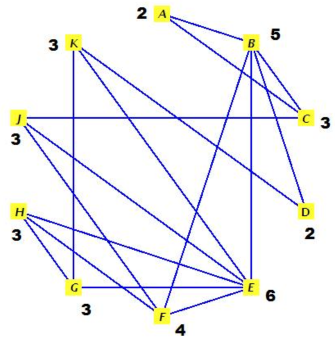
Twierdzenie Brooksa

Twierdzenie Brooksa

Jeśli G jest kliką lub cyklem o nieparzystej liczbie wierzchołków, to $\chi(G) = \Delta G + 1$. Jeśli G jest dowolnym innym grafem to $\chi(G) \leqslant \Delta G$.

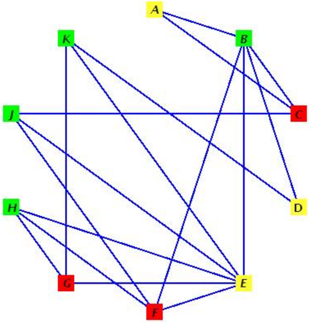
- Dla cykli, maksymalny stopień wynosi 2. Dlatego jeśli cykl ma nieparzystą liczbę wierzchołków, to jego liczba chromatyczna wynosi 3.
- Jeśli cykl ma parzystą liczbę wierzchołków, to jego liczba chromatyczna wynosi 2. Można go pokolorować dwoma kolorami - wierzchołki parzyste jednym, wierzchołki nieparzyste drugim. Spełnia nierówność: $2 = \chi(G) \leqslant \Delta G = 2$.

Twierdzenie Brooksa - przykład



Nierówność w twierdzeniu Brooksa może być „bardzo ostra”. Na przykład tu z twierdzenia Brooksa wiemy tylko, że $\chi(G) \leqslant \Delta G = 6$...

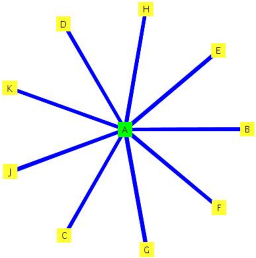
Twierdzenie Brooksa - przykład



...a w rzeczywistości $\chi(G) = 3$ (przykład z rysunku, mniej niż 3 nie może być bo np. ABC tworzą 3-klikę).

Twierdzenie Brooksa - przykład

Oszacowanie z twierdzenia Brooksa może być „dowolnie słabe". W szczególności, można skonstruować „gwiazdę" o dowolnej liczbie wierzchołków...



...dla której oszacowanie z twierdzenia Brooksa jest o jeden mniejsze niż liczba wierzchołków, a $\chi(G) = 2$.

Ciekawostka - zagadnienie czterech barw

Dlatego taką trudność sprawiło matematykom i informatykom tzw. zagadnienie czterech barw:

Zagadnienie czterech barw

Czy każdą mapę polityczną na płaszczyźnie da się pomalować 4 barwami tak, by sąsiadujące kraje były pomalowane innymi kolorami?

Po spostrzeżeniu, że kraje można zastąpić wierzchołkami grafu, a granice - krawędziami między graniczącymi państwami problem ten zmienia się w:

Zagadnienie czterech barw

Czy każdy graf G - planarny (czyli taki, że można go narysować na płaszczyźnie tak, by jego krawędzie się nie przecinały) spełnia $\chi(G) \leqslant 4$?

Ciekawostka - zagadnienie czterech barw

Problem 4 barw został postawiony w połowie XIX wieku, a rozwiązali go dopiero Apple, Haken i Koch w 1977 roku.Odpowiedź była pozytywna (więc odtąd mówi się raczej o Twierdzeniu o Czterech Barwach), ale... nie została chętnie uznana przez środowisko matematyczne. Powodem był fakt, że do dowodu konieczne było zastosowanie komputera: autorzy sprowadzili zagadnienie do sprawdzenia ok. 1500 skomplikowanych przypadków, które przeliczył komputer. Napotkało to problemy filozoficzne: jak udowodnić, że komputer się nie pomylił, zwłaszcza, że program był bardzo skomplikowany, a jego wykonanie trwało wiele dni (wiarygodność ówczesnych komputerów też nie była wysoka). Dziś mamy ulepszone dowody (choć do wszystkich konieczne jest komputerowe wspomaganie), które da się sprawdzić w ciągu kilku godzin na własnym laptopie, więc matematycy uznają Twierdzenie o Czterech Barwach za prawdziwe.

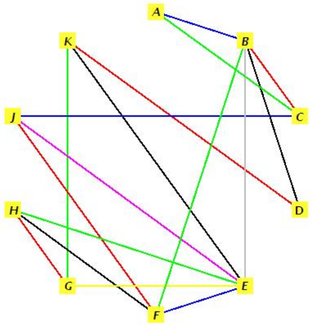
Kolorowanie krawędziowe - definicja

Kolorowanie krawędziowe

Kolorowanie krawędziowe grafu $G = (V(G), E(G))$ to każde przyporządkowanie krawędziom grafu kolorów, w którym dwie krawędzie o wspólnym wierzchołku mają różne kolory.
Formalnie, jest to funkcja $c : E(G) \to K$ (K - skończony zbiór kolorów lub innych etykiet), taka, że dla dowolnych $u, v, w \in V(G)$, jeżeli $vu, vw \in E(G)$ to $c(vu) \neq c(vw)$.

Ponownie, najciekawszym problemem związanym z kolorowaniem krawędziowym grafu jest znalezienie *kolorowania optymalnego*, czyli takiego, które używa jak najmniejszej liczby kolorów.

Kolorowanie krawędziowe - przykład



Powyżej przykład kolorowania krawędziowego za pomocą siedmiu kolorów. Czy jest to kolorowanie optymalne?

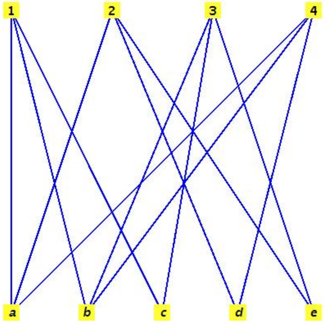
Kolorowanie krawędziowe - zastosowania

- Układanie harmonogramów zajęć na uczelni: Dany niech będzie graf dwudzielny. Pierwszy typ wierzchołków to pracownicy dydaktyczni, a drugi - grupy dziekańskie. Wierzchołki są połączone wtedy i tylko wtedy, gdy dany pracownik ma poprowadzić zajęcia z daną grupą. Kolory krawędzi odpowiadają różnym godzinom, w których mogą się odbyć zajęcia. Oczywiście, żadna grupa i żaden nauczyciel nie może mieć więcej niż jedne zajęcia na raz, więc musimy krawędzie pokolorować zgodnie z warunkami kolorowania krawędziowego.
  Będzie nas interesować najmniejsza możliwa liczba kolorów koniecznych do użycia w kolorowaniu krawędziowym. Liczba ta będzie symbolizować minimalną liczbę godzin, w których da się poukładać wszystkie zajęcia.

Kolorowanie krawędziowe - zastosowania

- Analogicznie można ułożyć harmonogram zawodów sportowych, w którym wierzchołki oznaczają uczestników, a krawędzie - mecze, które mają między sobą rozegrać. Krawędzie pomalowane tym samym kolorem to spotkania, które można rozegrać w tym samym czasie.
- W telekomunikacji światłowodowej przez kolorowanie krawędziowe rozwiązuje się zagadnienie przypisania częstotliwości światła parom węzłów komunikacyjnych, które mają między sobą przesyłać dane.

Kolorowanie krawędziowe - przykład zastosowań



Grupy dziekańskie w tym przypadku oznaczyłem cyframi, a nauczycieli literami.

Indeks chromatyczny i twierdzenie Vizinga

Indeks chromatyczny

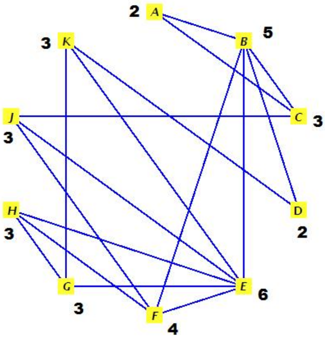
Indeks chromatyczny grafu G (oznaczany przez $\chi'(G)$) to minimalna liczba kolorów, które trzeba wykorzystać, by wykonać kolorowanie krawędziowe tego grafu.
Formalnie, jest to najmniejsza możliwa moc zbioru K z definicji kolorowania krawędziowego, taka, że dla tego zbioru funkcja c istnieje.

Indeks chromatyczny można oszacować znacznie precyzyjniej niż liczbę chromatyczną:

Twierdzenie Vizinga

Dla dowolnego grafu G zachodzi: $\Delta(G) \leqslant \chi'(G) \leqslant \Delta(G) + 1$.

Twierdzenie Vizinga - przykład

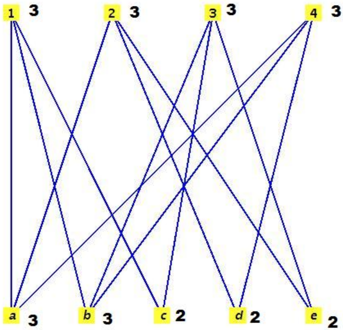


W szczególności dla tego grafu $6 \leqslant \chi'(G) \leqslant 7$. Czy zatem nasze wcześniejsze kolorowanie było optymalne? Ćwiczenie.

Twierdzenie Vizinga - szczególne przypadki

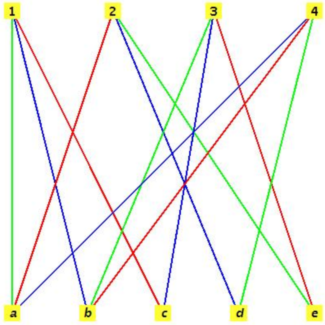
- Równość $\Delta(G) = \chi'(G)$ zachodzi dla o wiele większej liczby grafów niż $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.
- Kliki o parzystej liczbie wierzchołków spełniają równość $\Delta(G) = \chi'(G)$, a kliki o nieparzystej liczbie wierzchołków: $\Delta(G) + 1 = \chi'(G)$.
- Jeśli H - podgraf G, to $\chi'(H) \leqslant \chi'(G)$.
- Jeśli G to graf-droga to $\chi'(G) = 2$ (czyli $\Delta(G) = \chi'(G)$).
- Jeśli G to graf-cykl to $\chi'(G) = 2$, jeśli G ma parzystą liczbę wierzchołków (czyli $\Delta(G) = \chi'(G)$) i $\chi'(G) = 3$, jeśli G ma nieparzystą liczbę wierzchołków (czyli $\Delta(G) + 1 = \chi'(G)$).
- Graf Petersena ma indeks chromatyczny równy 4 (czyli $\Delta(G) + 1 = \chi'(G)$).
- Dla grafów dwudzielnych (w tym drzew) zachodzi $\Delta(G) = \chi'(G)$. Z tej własności skorzystamy dla zagadnienia podziału zajęć.

Twierdzenie Vizinga - przykład



Z twierdzenia Vizinga i wniosku o grafach dwudzielnych możemy wykazać, że indeks chromatyczny powyższego grafu wynosi 3.

Twierdzenie Vizinga - przykład



Faktycznie, krawędzie dało się pokolorować trzema kolorami, zatem (o ile nie ograniczają nas inne czynniki zewnętrzne) można ułożyć harmonogram tak, żeby wszystkie odbyły się w ciągu 3 terminów - np. najpierw odbywają się (jednocześnie) zajęcia „czerwone”, potem „zielone”, a potem „niebieskie”.