# 1c. Kombinatoryka: zliczanie permutacji z powtórzeniami i podziałów, zasada szufladkowa Dirichleta

Grzegorz Kosiorowski

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

# Podział zbioru i zliczanie permutacji - wyjaśnienie

Czasem mamy do czynienia ze zbiorami, które się dzielą na kilka bloków - poszczególne bloki są rozróżnialne, ale elementy wewnątrz tych bloków już nie. Na przykład możemy rozważyć zbiór kulek identycznych we wszystkim poza kolorem: 3 są czerwone, 2 są niebieskie i 1 jest zielona. Wtedy naturalnym podziałem tego zbioru na bloki jest: blok czerwonych kulek, blok niebieskich kulek, blok zielonych kulek. Jeśli chcemy permutować, czyli ustawiać w kolejności te kulki, nie możemy liczby permutacji oznaczyć po prostu przez 6!, bo na przykład zamiana miejscami dwóch czerwonych kulek nie tworzy nowego ustawienia! Dlatego potrzebujemy innego wzoru.

# Podział zbioru i zliczanie permutacji - definicja

## Podział zbioru

*Podział* zbioru $S$ to rodzina jego parami rozłącznych podzbiorów, których sumą jest sam zbiór $S$. Rozłączne podzbiory na które dzielimy $S$ nazywamy *blokami* podziału.

## Twierdzenie o zliczaniu permutacji

Załóżmy, że zbiór $n$ przedmiotów został podzielony na $k$ bloków mających odpowiednio $n_1, \ldots, n_k$ elementów $(n = n_1 + \ldots + n_k)$. Dwa przedmioty są tego samego typu, jeśli należą do tego samego bloku danego podziału. Dwie permutacje są rozróżnialne, jeśli na co najmniej jednym miejscu stoją w nich elementy różnych typów. Wtedy liczba rozróżnialnych permutacji naszego zbioru wynosi:

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

# Zliczanie permutacji - przykład

## Zadanie

Kapelusz zawiera karteczki z kolejnymi literami słów a) PAWEŁ b) BARNABA. Karteczki są pojedynczo wyjmowane z kapelusza i układane w takiej kolejności, w jakiej zostały wyciągnięte. Ile różnych słów (tj. ciągów liter odpowiedniej długości) można w taki sposób otrzymać? Dwa słowa uznajemy za różne, jeśli choć w jednym miejscu mają one różne litery.

Oczywiście, w przypadku a) mamy 5 różnych liter, więc można ułożyć z nich $5! = 120$ słów (tyle, ile jest ich permutacji).

# Zliczanie permutacji - przykład

## Zadanie

Kapelusz zawiera karteczki z kolejnymi literami słów a) PAWEŁ b) BARNABA. Karteczki są pojedynczo wyjmowane z kapelusza i układane w takiej kolejności, w jakiej zostały wyciągnięte. Ile różnych słów (tj. ciągów liter odpowiedniej długości) można w taki sposób otrzymać? Dwa słowa uznajemy za różne, jeśli choć w jednym miejscu mają one różne litery.

W przypadku b) karteczki dzielą się na 4 typy: 2 karteczki $B$, 3 karteczki $A$ oraz po jednej karteczce $R$ i $N$. Jeśli zamienimy miejscami karteczki tego samego typu, ułożone słowo się nie zmieni.Zatem zgodnie z twierdzeniem o zliczaniu permutacji, rozwiązaniem jest:

$$\frac{7!}{3!2!1!1!} = 420.$$

# Zliczanie podziałów

Innym aspektem tego samego zagadnienia jest zliczanie nie permutacji rozróżnialnych pewnym podziałem, ale samych podziałów.

## Podział uporządkowany

*Podział uporządkowany* zbioru $S$ to ciąg $(A_1, \ldots, A_k)$, którego elementy tworzą podział $S$. Istotna jest kolejność w jakiej występują zbiory $A_i$, ale nie kolejność elementów wewnątrz tych zbiorów.

## Twierdzenie o zliczaniu podziałów uporządkowanych

Jeśli dany zbiór ma $n$ elementów i jeśli $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, to istnieje

$$\frac{n!}{n_1!n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

podziałów uporządkowanych $(A_1, \ldots, A_k)$ tego zbioru takich, że $|A_i| = n_i$ dla $i = 1, \ldots, k$.

# Zliczanie podziałów - objaśnienie

Twierdzenie powyższe działa, gdy grupę obiektów (przedmiotów, osób itp.) mamy podzielić na części, z których każda część odróżnia się od innych. Zazwyczaj kolejność uporządkowania zbiorów podziału nie ma znaczenia - ważne, że te zbiory są istotnie rozróżnialne.

# Zliczanie podziałów - przykład

## Zadanie

Na ile sposobów można spośród 20-osobowej grupy utworzyć 3 rozłączne komisje, jeśli muszą mieć, odpowiednio, 3, 5 i 7 członków?

Po pierwsze, zauważmy, ze same komisje nie tworzą podziału uporządkowanego bo suma liczby ich członków nie wynosi 20. Dlatego tak naprawdę rozważamy podział tej grupy na 4 zbiory: $A_1$ - członków 3-osobowej komisji, $A_2$ - członków 5-osobowej komisji, $A_3$ - członków 7-osobowej komisji i $A_4$ - osoby spoza komisji (których jest 5).Na mocy twierdzenia o zliczaniu podziałów otrzymujemy wynik:

$$\frac{20!}{3!5!7!5!}.$$

# Zliczanie podziałów - przykład 2

## Zadanie

Rozdanie brydżowe to podział uporządkowany talii 52 kart na 4 zbiory, po 13 kart w każdym.
a) Ile jest możliwych rozdań brydżowych?
b) Ile jest rozdań brydżowych takich, że każdy z graczy otrzyma jednego asa?

W zadaniu a) po prostu wstawiamy do znanego wzoru:

$$\frac{52!}{(13!)^4}.$$

# Zliczanie podziałów - przykład 2

## Zadanie

Rozdanie brydżowe to podział uporządkowany talii 52 kart na 4 zbiory, po 13 kart w każdym.
b) Ile jest rozdań brydżowych takich, że każdy z graczy otrzyma jednego asa?

Podpunkt b) wymaga ciut więcej pracy. Najpierw rozważamy rozdzielenie 4 asów. Jest to po prostu ustawienie ich w kolejności (permutacja) i przydzielenie pierwszego asa pierwszemu graczowi, drugiego drugiemu itd. Zatem mamy 4! możliwości. Pozostałe 48 kart poddajemy podziałowi uporządkowanemu na 4 zbiory po 12 kart (żeby każdy gracz, razem z asem, miał po 13 kart).Z twierdzenia o podziałach i prawa iloczynu otrzymujemy wynik:

$$4! \cdot \frac{48!}{(12!)^4}.$$

# Prawdopodobieństwo dyskretne - przypomnienie

Wyniki ostatniego zadania wydają się być na tyle duże, że nieprzydatne do praktycznych zastosowań. Jednak, jeśli przypomnimy sobie szkolną definicję prawdopodobieństwa, możemy dzięki nim obliczyć prawdopodobieństwo, że w rozdaniu brydżowym każdy z graczy będzie mieć asa. To prawdopodobieństwo jest ilorazem liczby rozdań, w których każdy ma asa, przez liczbę wszystkich możliwych rozdań:

$$4! \cdot \frac{48!}{(12!)^4} : \frac{52!}{(13!)^4} = \frac{4! \cdot 13^4}{49 \cdot 50 \cdot 51 \cdot 52} \approx 10,5\%.$$

Czyli „sprawiedliwy" podział asów jest dość mało prawdopodobny.

# Zasada szufladkowa Dirichleta

Oczywistym jest, że jeśli mamy rozmieścić $m$ przedmiotów w $n$ szufladach i założymy, że $m > n$, to istnieje szuflada w której są co najmniej 2 przedmioty. Pewne uogólnienie tego faktu nazywamy zasadą szufladkową (pudełkową) Dirichleta.

## Zasada szufladkowa Dirichleta

Jeśli skończony zbiór $S$ jest podzielony na $k$ podzbiorów $S_1, \ldots, S_k$ (tzw. szufladki) to co najmniej jeden z tych podzbiorów ma co najmniej $\frac{|S|}{k}$ elementów.

# Zasada szufladkowa Dirichleta

Najczęściej zasada Dirichleta jest używana w następującej postaci:

## Zasada szufladkowa Dirichleta - wniosek

Jeśli skończony zbiór $S$ jest podzielony na $k$ podzbiorów $S_1, \dots, S_k$ (tzw. szufladki) i $|S| > nk$ to co najmniej jeden z tych podzbiorów ma co najmniej $n + 1$ elementów.

Twierdzenie to wydaje się trywialne, ale może prowadzić do bardzo ciekawych wniosków.

# Zasada szufladkowa Dirichleta - przykład 1

## Zadanie

Każdy punkt płaszczyzny jest pomalowany na czerwono lub na niebiesko. Udowodnić, że istnieje na tej płaszczyźnie nieskończenie wiele par punktów, które są oddalone od siebie dokładnie o 1 i pomalowane tym samym kolorem.

Na nieograniczonej płaszczyźnie możemy narysować nieskończenie wiele rozłącznych trójkątów równobocznych o boku długości 1 (np. przekształcając za każdym razem ostatnio narysowany trójkąt przeez translację o 2 do góry, albo w prawo). Każdy z tych trójkątów ma 3 wierzchołki pomalowane dwoma kolorami.

# Zasada szufladkowa Dirichleta - przykład 1

## Zadanie

Każdy punkt płaszczyzny jest pomalowany na czerwono lub na niebiesko. Udowodnić, że istnieje na tej płaszczyźnie nieskończenie wiele par punktów, które są oddalone od siebie dokładnie o 1 i pomalowane tym samym kolorem.

Dla każdego z tych trójkątów zbiór jego wierzchołków $S$ dzielimy na dwie szufladki: wierzchołki czerwone $S_1$ i niebieskie $S_2$. Jako, że $3 > 2 \cdot 1$ to na mocy zasady szufladkowej, co najmniej jeden z tych podzbiorów ma co najmniej 2 elementy. Te 2 elementy są parą punktów oddalonych dokładnie o 1 i pomalowaną tym samym kolorem. Ponieważ trójkątów było nieskończenie wiele, więc takich par też jest nieskończenie wiele.

# Zasada szufladkowa Dirichleta - przykład 2

## Zadanie

Niech $A$ będzie dowolnym zbiorem 12-elementowym liczb naturalnych dodatnich nie większych niż 50. Udowodnić, że istnieją co najmniej cztery różne (ale niekoniecznie rozłączne) podzbiory pięcioelementowe zbioru $A$ takie, że suma elementów każdego z tych czterech podzbiorów jest taka sama.

Rozważmy najpierw wszystkie możliwe sumy elementów podzbiorów pięcioelementowych zbioru $A$. Ponieważ w $A$ są tylko liczby naturalne od 1 do 50, suma dowolnych pięciu elementów tego zbioru jest równa co najmniej $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$, a co najwyżej $50 + 49 + 48 + 47 + 46 = 240$. Zatem możliwych do uzyskania sum jest co najwyżej 226 (ilość liczb naturalnych od 15 do 240 włącznie).

# Zasada szufladkowa Dirichleta - przykład 2

## Zadanie

Niech $A$ będzie dowolnym zbiorem 12-elementowym liczb naturalnych dodatnich nie większych niż 50. Udowodnić, że istnieją co najmniej cztery różne (ale niekoniecznie rozłączne) podzbiory pięcioelementowe zbioru $A$ takie, że suma elementów każdego z tych czterech podzbiorów jest taka sama.

Teraz pytanie: ile jest podzbiorów pięcioelementowych zbioru 12-elementowego? Oczywiście, $\binom{12}{5} = 792$. Jednakże, jak wiemy z wcześniejszego rozumowania, możliwych do uzyskania sum jest 226. Zatem każdemu podzbiorowi $A$ (których jest 792) przypiszemy szufladkę, którą jest jego suma (takich szufladek jest 226). Jako, że $792 > 3 \cdot 226$, to z zasady Dirichleta, w którejś szufladce muszą być co najmniej 4 elementy, czyli musi istnieć taka liczba, że co najmniej 4 podzbiory realizują ją jako sumę swoich wszystkich elementów.