Na wykładzie zajmujemy się układami równań liniowych, pojawi się też po raz pierwszy macierz. Formalną (i porządną) teorią macierzy zajmiemy się na kolejnych wykładach. Na razie omawiamy układy równań liniowych i związane z nim pojęcia. Postaramy się też opanować bardzo istotną metodę pozwalającą rozwiązywać układy równań liniowych — metodę Gaussa-Jordana. Jest ona uogólnieniem (pewną modyfikacją) metody eliminacji znanej Państwu ze szkoły średniej.

1 Układy równań liniowych

Dowolny układ m równań z n niewiadomymi możemy zapisać w postaci

$$(\star)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

gdzie $x_1, \ldots, x_n$ są niewiadomymi, zaś $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ dla $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$. *Rozwiązaniem* tego układu nazywamy każdy punkt $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, który spełnia $(\star)$. Skalary a_{ij} nazywamy *współczynnikami układu*, zaś skalary b_i *wyrazami wolnymi układu* $(\star)$.

Mówimy, że układ $(\star)$ jest

- **oznaczony**, jeśli posiada dokładnie jedno rozwiązanie,
- **nieoznaczony**, jeśli posiada nieskończenie wiele rozwiązań,
- **sprzeczny**, jeśli nie posiada rozwiązań.

Ponadto będziemy mówić , że jest on

- **jednorodny**, jeżeli wszystkie wyrazy wolne są równe zero,[1]
- **niejednorodny**, jeżeli układ nie jest jednorodny,

1.1 Zastosowania w ekonomii

Wiele problemów ekonomicznych sprowadzić można do problemu znalezienia rozwiązania (rozwiązań) układu równań liniowych. Tu rozpatrzymy prosty model, którego w przyszłości stanie się częścią składową bardziej rozbudowanego modelu ekonomicznego, tzw. modelu przepływów międzygałęziowych.

Rozpatrzmy następującą gospodarkę składającą się z 3 dóbr. Załóżmy, że każde z dóbr jest wykorzystywane w produkcji pozostałych. Niech x_{ij} oznacza ilość i-tego dobra używanego do produkcji dobra j-tego. Przez x_i oznaczamy całkowitą wielkość produkcji dobra i-tego. Ilość i-tego dobra użyta do wyprodukowania jednej jednostki dobra j-tego dana jest przez

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}.$$

Zakładamy też, że każde z trzech dóbr musi być wyprodukowane (np. aby zostało skonsumowane przez gospodarstwa domowe).

Przypuśćmy, że mamy następujące dane statystyczne:

$$a_{11} = a_{22} = a_{13} = 0,3,$$

[1] Warto pamiętać, że dowolny układ jednorodny posiada przynajmniej jedno rozwiązanie — gdy wszystkie niewiadome są równe zero (rozwiązaniem układu jest wektor zerowy $(0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$).

$$a_{21} = a_{12} = a_{23} = 0,2,$$

oraz

$$a_{31} = a_{33} = 0,4, \; a_{32} = 0,6.$$

Ponadto zapotrzebowanie końcowe na pierwsze dobro wynosi 20, na drugie — 30, a na trzecie 40 jednostek. Wielkość produkcji spełniająca wymagania wkładów oraz zapotrzebowanie końcowe może zostać wyznaczona poprzez rozwiązanie następującego układu równań liniowych:

$$\begin{cases} x_1 = 0,3x_1 + 0,2x_2 + 0,3x_3 + 20, \\ x_2 = 0,2x_1 + 0,3x_2 + 0,2x_3 + 30, \\ x_3 = 0,4x_1 + 0,6x_2 + 0,4x_3 + 40. \end{cases}$$

1.2 Pojęcia i twierdzenia pomocnicze

Naszym celem jest wprowadzenie efektywnej metody wyznaczania rozwiązań układów równań liniowych z dużą liczbą niewiadomych. Aby ją wprowadzić potrzebujemy narzędzi, które pozwolą nam to osiągnąć. Przez w_i oznaczać będziemy i-ty wiersz układu równań (i-te równanie). Wtedy prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1. *Wykonanie następujących operacji (tzw. operacji elementarnych)*

- *zamiana dwóch równań:* $w_k \leftrightarrow w_j$
- *pomnożenie danego równania przez niezerowy skalar:* $w_k \to \alpha w_k$, $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$,
- *dodanie do danego równania innego pomnożonego przez skalar:* $w_k \to w_k + \alpha w_j$, $(j \neq k)$

nie zmienia zbioru rozwiązań.

Powyższe twierdzenie oznacza, że dodając równania do siebie, zamieniając kolejność równań jak również mnożąc dane równanie przez niezerowy skalar (tzn. liczbę z $\mathbb{R}\setminus\{0\}$) nie zmienimy rozwiązania (rozwiązań) układu. Kluczowe informacje jakie mamy o układzie ($\star$) to współczynniki równania $((a_{ij}))$. Zestawmy je w tabeli (nazywać ją będziemy *macierzą uzupełnioną* układu ($\star$))

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]. \tag{1}$$

Ponadto

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

nazywamy *macierzą współczynników układu*, a

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

macierzą (kolumną) wyrazów wolnych układu.

2 Metoda Gaussa-Jordana — ogólny opis

Metoda Gaussa-Jordana to metoda, która bazując na trzech operacjach elementarnych: dodawania do jednego równania innego równania pomnożonego przez dowolną liczbę rzeczywistą, przemnożeniu danego równania przez niezerowy skalar i zamiany dwóch równań miejscami pozwala wyznaczyć wszystkie rozwiązania danego układu równań liniowych albo stwierdzić, że nie ma on rozwiązań, czyli jest sprzeczny.

Opiszemy ogólnie odpowiedni algorytm, a później objaśnimy jego działanie na przykładach. Algorytm można podzielić na dwie części. W części pierwszej sprowadzamy macierz układu (1) do postaci „schodkowej". Ta część składa się z takiej liczby kroków ile jest niewiadomych. W pierwszym kroku patrzymy na wyraz w pierwszym wierszu i pierwszej kolumnie a_{11}. Następnie

1. Jeśli $a_{11} \neq 0$, to normujemy pierwszy wiersz, tzn. dzielimy go przez a_{11}: $w_1 \to \frac{1}{a_{11}} w_1 =: w_1'$ i uzyskujemy 1 w miejsce a_{11}.[2] Następnie przy pomocy wiersza w_1' „zerujemy" pozostałe wyrazy w pierwszej kolumnie. Dokładniej, jeśli l-ty wiersz ($l \neq 1$) ma w pierwszej kolumnie liczbę d, to liczbą przez którą mnożymy pierwsze równanie jest $-d$, a następnie wykonujemy działanie $w_l \to w_l - dw_1' =: w_l'$ (jeśli $d = 0$, to $w_l' = w_l$).[3]

2. Jeśli $a_{11} = 0$, to zamieniamy wiersz w_1 z innym wierszem (np. w_l), który w pierwszej kolumnie ma wyraz niezerowy ($w_1 \leftrightarrow w_l$) po czym wykonujemy algorytm opisany w pkt. 1. Natomiast jeśli taki wiersz nie istnieje (pierwsza kolumna składa się z samych zer) w tym kroku nic nie robimy.

Na podstawie Twierdzenia 1 wykonane operacje nie zmieniają zbioru rozwiązań układu ($\star$). Przypuśćmy, że wykonaliśmy $k-1$ kroków i mamy wykonać k-ty. Gdy w k-tej kolumnie brak jest niezerowych wyrazów leżących niżej niż wszystkie wyznaczone do tej pory współczynniki wiodące (pierwsze niezerowe wyrazy w wierszach) macierzy, to w k-tym kroku nie robimy nic. W przeciwnym wypadku oznaczmy przez l numer najwyższego z wierszy macierzy leżących niżej niż wszystkie wyznaczone do tej pory współczynniki wiodące. Jeśli l-ty wiersz ma w k-tej kolumnie wyraz zerowy to zamieniamy miejscami l-ty wiersz i któryś (powiedzmy pierwszy od góry) spośród wierszy leżących niżej i mających w k-tej kolumnie wyraz niezerowy. Dzięki temu l-ty wiersz będzie miał w k-tej kolumnie wyraz niezerowy, ozn. go przez $c_k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.[4] Możemy teraz powtórzyć procedurę opisaną w kroku 1 (pkt 1). Normujemy l-ty wiersz (czyli dzielimy cały wiersz przez c_k otrzymując jedynkę w miejsce c_k). Możemy teraz l-ty wiersz mnożyć przez odpowiednie liczby rzeczywiste i dodawać do pozostałych wierszy tak aby po takim przekształceniu miały one w k-tej kolumnie wyrazy zerowe. Ponownie gdy przekształcany wiersz ma w k-tej kolumnie liczbę d, to liczbą, przez którą należy pomnożyć l-te równanie jest $(-d)$. Ponadto widzimy, że ponieważ wszystkie wyrazy w l-tym wierszu i kolumnach $1, \ldots, k-1$ są zerami, takie dodawanie nie naruszy kolumn $1, \ldots, k-1$.

Wynikiem zastosowania tego algorytmu jest zawsze macierz, w której

1. wiersze z samymi zerami znajdują się na dole;

2. pierwszy niezerowy wyraz (współczynnik wiodący wiersza) w każdym wierszu jest równy 1;

3. współczynnik wiodący w kolejnym wierszu (jeśli wystepuje) znajduje się w kolumnie o wyższym numerze niż współczynnik wiodący w wierszu bieżącym;

4. każda kolumna ze współczynnikiem wiodącym ma zera na pozostałych miejscach.

---

[2] Tu warto pamiętać o jednej możliwej modyfikacji — aby obliczenia były prostsze warto (np. aby dopóki to możliwe operować na liczbach całkowitych a nie na ułamkach) czasem najpierw zamienić pierwszy wiersz z wierszem, w którym mamy już jedynkę w pierwszej kolumnie.

[3] Jedynkę znajdującą się w pierwszym wierszu, pierwszej kolumnie tej macierzy nazywamy *współczynnikiem wiodącym macierzy* (ang. *pivot*).

[4] Ponownie aby obliczenia były prostsze dobrze czasem wybrać wiersz, w którym mamy już jedynkę w k-tej kolumnie. Można zamienić l-ty wiersz z innym (o wyższym numerze), który na k-tej pozycji ma jedynkę (to właśnie robimy w przykładzie w par. 3.1.1).

Jest to tzw. *macierz schodkowa zredukowana.*

Po zakończeniu pierwszej części algorytmu pewna liczba ostatnich wierszy może mieć zerowe lewe strony (na lewo od prostej pionowej dzielącej macierz). Jeśli choć jedno z nich ma niezerową prawą stronę, to oczywiste jest, że układ jest sprzeczny. Jeśli natomiast wszystkie takie wiersze mają również zerowe prawe strony, to można je zignorować, bo nic nie wnoszą do układu. W drugiej części wylicza się już łatwo niewiadome, wracając z zapisu macierzowego do zapisu równań pamiętając, że k-ta kolumna odpowiada za k-tą niewiadomą.[5]

Opisana metoda jest uniwersalna, każda macierz może zostać przekształcona do postaci schodkowej zredukowanej za pomocą operacji elementarnych, w szczególności metody Gaussa-Jordana.

3 Przykłady

3.1 Zastosowanie metody Gaussa-Jordana

3.1.1 Układ oznaczony

Rozpatrzmy układ

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 - 3x_2 = 19, \\ x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 1. \end{cases}$$

Jego macierz ma postać

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 0 & 19 \\ 1 & 2 & 9 & 1 \end{array}\right].$$

Zajmijmy się najpierw pierwszą kolumną:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 0 & 19 \\ 1 & 2 & 9 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 \to w_3 - w_1]{w_2 \to w_2 - 2w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & -2 & 23 \\ 0 & 1 & 8 & 3 \end{array}\right].$$

Następnie widzimy, że w drugim wierszu, drugiej kolumnie mamy liczbę różną od zera. Jednak jeśli podzielimy wiersz przez -5 będziemy musieli działać na ułamkach czego chętnie byśmy uniknęli. Dlatego zamieniamy wiersze 2. i 3., a następnie przy jego pomocy zerujemy pozostałe wyrazy w drugiej kolumnie.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & -2 & 23 \\ 0 & 1 & 8 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2 \leftrightarrow w_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 8 & 3 \\ 0 & -5 & -2 & 23 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 \to w_3 + 5w_2]{w_1 \to w_1 - w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & -5 \\ 0 & 1 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 38 & 38 \end{array}\right].$$

Dzieląc ostatni wiersz przez 38 i zerując przy pomocy otrzymanego wiersza pozostałe wyrazy w trzeciej kolumnie uzyskujemy

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & -5 \\ 0 & 1 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 38 & 38 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3 \to \frac{1}{38} w_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & -5 \\ 0 & 1 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 \to w_2 - 8w_3]{w_1 \to w_1 + 7w_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

[5] W pewnych przypadkach macierz korzystnie jest sprowadzić do postaci schodkowej, gdzie macierz *schodkowa* — to macierz, której pierwsze niezerowe elementy kolejnych niezerowych wierszy, znajdują się w coraz dalszych kolumnach, a wiersze zerowe są ostatnie. Widać, że sprowadzanie do macierzy schodkowej różni się od sprowadzania do macierzy schodkowej zredukowanej tym, że wystarczy po prostu zerować wyrazy znajdujące się w kolumnie poniżej danego współczynnika wiodącego, pozostawiając wyrazy leżące nad współczynnikiem bez zmian. Ta metoda nazywana jest *metodą Gaussa.*

Ponieważ pierwsza kolumna odpowiada za współczynniki przy x_1, druga przy x_2, a trzecia odpowiednio przy x_3, otrzymujemy rozwiązanie:

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = -5, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

⋆ Wyprowadzenie rozwiązania układu z postaci macierzy może być jaśniejsze, jeśli zauważymy, że w wyznaczonej przez nas macierzy schodkowej macierz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ jest macierzą współczynników układu, a $\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$ macierzą wyrazów wolnych. Wyprzedzając nieco wykład (zapis będzie jasny po omówieniu mnożenia macierzy) możemy stwierdzić, że

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = -5, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

.

3.1.2 Układ nieoznaczony

Przykład A. Rozwiążmy jednorodny układ równań

$$\begin{cases} x_2 - x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 6x_4 - 4x_5 = 0, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ 4x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 12x_4 - 8x_5 = 0. \end{cases}$$

Spisując macierz uzupełnioną i przekształcając (proszę samodzielnie to przeliczyć i opisać) otrzymujemy

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 6 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 8 & 12 & -8 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Widzimy, że dwa ostatnie równania nie niosą żadnej informacji (powstały z trzech pierwszych równań). Możemy je więc opuścić:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

Układ posiada nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od 2 parametrów (liczba parametrów to różnica liczby niewiadomych i liczby niezerowych wierszy w macierzy („schodków" w macierzy) współczynników). Niech $x_4 = s$, $x_5 = t$, $s, t \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$\begin{cases} x_1 - t = 0, \\ x_2 - s + t = 0, \\ x_3 + 2s - t = 0. \end{cases}$$

i ostatecznie rozwiązania układu mają postać

$$\begin{cases} x_1 = t, \\ x_2 = s - t, \\ x_3 = -2s + t, \\ x_4 = s, \\ x_5 = t, \end{cases}$$

gdzie $s, t \in \mathbb{R}$.

Przykład B. Rozwiążmy niejednorodny układ równań

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Spisując macierz uzupełnioną i przekształcając otrzymujemy

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2 \to w_2 + 2w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right].$$

Widzimy, że w drugiej kolumnie w drugim wierszu mamy zero i nie ma wiersza, z którym można byłoby ten wiersz zamienić. Zatem, zgodnie z algorytmem w drugim kroku nie wykonujemy żadnego działania i od razu przechodzimy do trzeciej kolumny:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2 \to \frac{1}{4} w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1 \to w_1 - w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Układ posiada nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od jednego parametru (liczba niewiadomych minus liczba schodków w zredukowanej macierzy schodkowej). Rozwiązanie ma postać

$$\begin{cases} x_1 = 2s + 1, \\ x_2 = s, \\ x_3 = 0, \end{cases}$$

gdzie $s \in \mathbb{R}$.

3.1.3 Układ sprzeczny

Rozwiążmy niejednorodny układ równań

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Wykorzystując metodę Gaussa-Jordana otrzymujemy

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 \to w_3 - 3w_1]{w_2 \to w_2 - 2w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 \to w_3 - w_2]{w_1 \to w_1 - w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right].$$

Spójrzmy na ostatni wiersz otrzymanej macierzy — wracając do równania ma ono postać $0 = -1$, zatem badany układ nie posiada rozwiązań.

3.2 „Schodkowanie”

Poniżej (bez komentarza) podajemy kilka przykładów sprowadzania do macierzy schodkowej zredukowanej.

- $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_3} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_4 \to w_4 - 3w_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 \to -w_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \end{bmatrix}$
  $\xrightarrow[w_4 \to w_4 + 3w_2]{\substack{w_1 \to w_1 - w_2 \\ w_3 \to w_3 - 2w_2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 \to w_3/5} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow[w_4 \to w_4 + 8w_3]{\substack{w_1 \to w_1 - 3w_3 \\ w_2 \to w_2 + 2w_3}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$
  schodki: $\begin{bmatrix} 0 & \star & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \star & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$

- $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 \to w_2 - 2w_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 \to -w_2/3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix},$
  schodki: $\begin{bmatrix} \star & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & \star & -3 \end{bmatrix};$

- $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, schodki: $\begin{bmatrix} \star & \\ & \star \\ & \\ & \end{bmatrix};$

- $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, schodki: $\begin{bmatrix} \star & & \\ & & \star \\ & & \end{bmatrix};$

- $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, schodki: $\begin{bmatrix} \star & & & & \\ & \star & & & \\ & & \star & & \end{bmatrix}.$

Istotne pojęcia: równanie liniowe, układ równań liniowych, rozwiązanie URL, współczynniki układu, wyrazy wolne, układ oznaczony,niezoznaczony,sprzeczny, jednorodny, niejednorodny, liczba rozwiązań URL, macierz uzupełniona układu, macierz schodkowa, macierz schodkowa zredukowana, metoda Gaussa-Jordana.