Na płaszczyźnie wprowadźmy działania

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d),$$

$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc).$$

Zbiór par (a,b), $a,b\in\mathbb{R}$ z tak wprowadzonymi działaniami nazywamy ciałem liczb zespolonych i oznaczamy przez $\mathbb{C}$. Jego elementy nazywamy *liczbami zespolonymi.* Oznaczając $i=(0,1)$ otrzymujemy $i^2=(0,1)(0,1)=(-1,0)$, czyli $i^2=-1$. Liczbę zespoloną i nazywa się jednostką urojoną.

Ćwiczenie 1. *Sprawdzić, że* $(1,0)$ *jest elementem neutralnym mnożenia (tzn.* $(1,0)(a,b)=(a,b)(1,0)=(a,b)$ *dla wszystkich* $a,b\in\mathbb{R}$*), a element odwrotny do* (a,b) *(czyli taka liczba* ξ*, że* $\xi(a,b)=(a,b)\xi=(1,0)$*) to*

$$\left(\frac{a}{a^2+b^2},-\frac{b}{a^2+b^2}\right).$$

Dowolną liczbę rzeczywistą utożsamiamy z liczbą zespoloną $(a,0)$. Nie doprowadzi to do żadnych nieporozumień, bo jeśli weźmiemy dwie liczby rzeczywiste a, b, potraktujemy je jako liczby zespolone $(a,0)$, $(b,0)$, a następnie obliczymy wg powyższych wzorów sumę albo iloczyn tych liczb to otrzymamy odpowiednio $(a+b,0)$, $(ab,0)$, czyli to samo, co gdybyśmy a, b dodali albo pomnożyli jako liczby rzeczywiste a dopiero później otrzymany wynik potraktowali jako liczbę zespoloną dopisując zero jako drugi wyraz pary. Możemy więc stwierdzić, że dowolna liczba rzeczywista jest też liczbą zespoloną, innymi słowy $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$.

Dzięki wprowadzonemu utożsamieniu dla dowolnej liczby zespolonej (a,b) mamy

$$(a,b)=(a,0)(1,0)+(b,0)(0,1)=a+bi,$$

zatem dowolną liczbę zespoloną (a,b) można zapisać w postaci

$$a+bi$$

gdzie $a,b\in\mathbb{R}$. W praktyce używa się właśnie tego zapisu (tzw. *postaci algebraicznej liczby zespolonej*). Jest ona najwygodniejsza w obliczeniach, np.

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i,$$

$$\begin{aligned}(a+bi)\cdot(c+di)&=ac+(ad+bc)i+bdi^2\\&=ac-bd+(ad+bc)i\end{aligned}$$

Dla dowolnej liczby zespolonej $a+bi$, gdzie $a,b\in\mathbb{R}$ definiuje się jej *część rzeczywistą*

$$\mathrm{Re}(a+bi):=a$$

i *część urojoną*

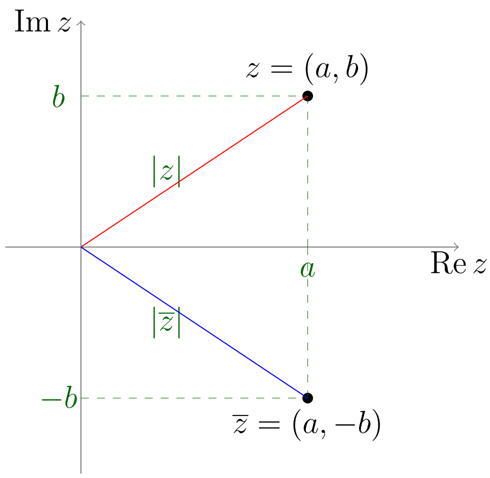
$$\mathrm{Im}(a+bi):=b.$$

Sprzężeniem liczby zespolonej $z=a+bi$ nazywamy liczbę

$$\overline{z}=a-bi.$$

Liczby zespolone możemy utożsamiać z punktami płaszczyzny, na której jest wybrany prostokątny układ współrzędnych kartezjańskich (nazywa się ją *płaszczyzną zespoloną*). Liczbie zespolonej $a+bi$ odpowiada punkt o współrzędnych (a,b). Parze liczb zespolonych wzajemnie ze sobą sprzężonych: $z=a+bi$, $\overline{z}=a-bi$ odpowiadają punkty położone symetrycznie względem osi odciętych. Wartość bezwzględna liczby zespolonej to odległość odpowiadającego jej punktu od początku układu współrzędnych:

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}.$$



Jeśli spojrzeć na liczby zespolone jako na wektory zaczepione w początku układu współrzędnych o końcach w odpowiadających im punktach, to widać, że dodawanie i odejmowanie liczb zespolonych jest tym samym co dodawanie i odejmowanie wektorów.

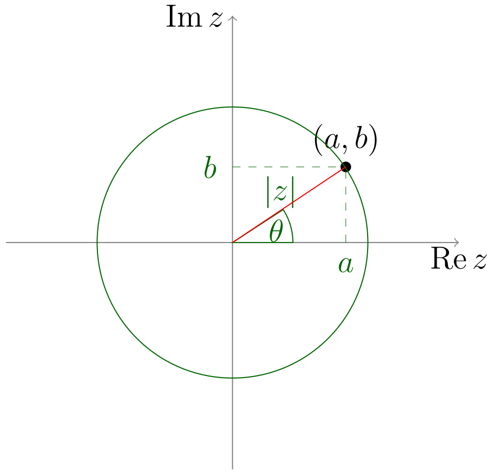
Argumentem (głównym) różnej od zera liczby zespolonej $a+bi$, gdzie $a,b\in\mathbb{R}$ nazywa się jedyny kąt $\theta\in[0,2\pi)$ spełniający warunki

$$\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Będziemy go oznaczać przez $\operatorname{Arg} z$. Możemy teraz zapisać liczbę zespoloną w *postaci trygonometrycznej*

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta),$$

gdzie $|z|$ jest modułem liczby z, zaś $\theta \in [0, 2\pi)$ — argumentem (głównym) liczby z (czyli $\cos\theta = \frac{a}{|z|}$, a $\sin\theta = \frac{b}{|z|}$).



Taka postać pozwala na naturalną interpretację geometryczną: θ to kąt między osią odciętych a wektorem o początku w punkcie $(0, 0)$ i końcu (a, b). Równocześnie $|z|$ to długość wektora, zatem liczba zespolona leży na okręgu o promieniu $|z|$ (patrz — rysunek).

Pozwala to na sprawne potęgowanie i pierwiastkowanie liczb zespolonych:

$$z^n = |z|^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

Pierwiastkiem n-tego stopnia liczby zespolonej z nazywamy zbiór

$$\sqrt[n]{z} = \{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$$

gdzie

$$x_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

dla $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Twierdzenie 1 (Zasadnicze twierdzenie algebry)**.** *Każdy wielomian jednej zmiennej o współczynnikach zespolonych stopnia co najmniej pierwszego ma pierwiastek zespolony.*

Kluczowym wnioskiem tego twierdzenia jest następujący fakt:

Twierdzenie 2. *Każdy niezerowy wielomian jednej zmiennej (zespolonej) stopnia n, o współczynnikach zespolonych posiada n miejsc zerowych.*

Stąd w zbiorze liczb zespolonych każde równanie wielomianowe n-tego stopnia posiada n pierwiastków. Na przykład równanie $x^2 + 1 = 0$ posiada dwa pierwiastki zespolone: i oraz $-i$ (jednocześnie równanie to nie posiada pierwiastków rzeczywistych bo otrzymane pierwiastki leżą poza prostą rzeczywistą).

Komentarz: Liczby zespolone znajdą zastosowania w dalszej części kursu gdy zajmiemy się badaniem wartości własnych macierzy. Najczęściej pojawiają się one właśnie w przypadku poszukiwania pierwiastków równania wielomianowego. Zainteresowanych szerszymi zastosowaniami liczb zespolonych w ekonomii (np. teorii równowagi ogólnej, teorii gier) i ekonometrii odsyłam do takich pozycji jak książka Hamiltona „*Time series*” czy Lindqvist, Sargent „*Recursive macroeconomic theory*”.