Interpolacja wielomianowa

Wykład z przedmiotu Metody numeryczne

Jakub Bielawski
Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

9 listopada 2016

Plan

Problematyka:

Jak znaleźć wielomian, którego wykres „przechodzi” przez zadane punkty?

Plan:

1. Interpolacja Lagrange'a
2. Interpolacja Newtona
3. Interpolacja Hermite'a

Wstęp

Niech będzie dane $n+1$ różnych liczb $x_0, x_1, \dots, x_n$ oraz $n+1$ dowolnych liczb $y_0, y_1, \dots, y_n$. Prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 6.1

Istnieje dokładnie jeden wielomian W_n stopnia co najwyżej n, który w punktach $x_0, x_1, \dots, x_n$ przyjmuje odpowiednio wartości $y_0, y_1, \dots, y_n$, tzn.:

$$\forall i \in \{0, 1, \dots, n\} : \qquad W_n(x_i) = y_i \tag{6.1}$$

Wielomian W_n nazywamy wówczas **wielomianem interpolacyjnym**, zaś liczby $x_0, x_1, \dots, x_n$ nazywamy **węzłami interpolacji**.

Interpolacja Lagrange'a

Konstrukcja wielomianu Lagrange'a

$$W_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot l_k(x) \tag{6.2}$$

gdzie:

$$l_k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \cdot \ldots \cdot (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdot \ldots \cdot (x_k - x_n)} \tag{6.3}$$

Interpolacja Lagrange'a

Przykład 6.1:
Znaleźć wielomian interpolacyjny Lagrange'a, który w węzłach: $1, -1, -2, 2, 3$ przyjmuje odpowiednio wartości: $-2, 0, 1, 3, 4$.
Rozwiązanie:
Węzły interpolacji wygodnie jest zestawić w tabeli:

k	0	1	2	3	4
x_k	1	-1	-2	2	3
y_k	-2	0	1	3	4

Współczynniki l_k obliczamy zgodnie ze wzorem (6.3):

$$l_0(x) = \frac{(x-(-1))(x-(-2))(x-2)(x-3)}{(1-(-1))(1-(-2))(1-2)(1-3)} = \frac{(x+1)(x+2)(x-2)(x-3)}{12}$$

$$l_1(x) = \frac{(x-1)(x-(-2))(x-2)(x-3)}{(-1-1))(-1-(-2))(-1-2)(-1-3)} = \frac{(x-1)(x+2)(x-2)(x-3)}{-24}$$

$$l_2(x) = \frac{(x-1)(x-(-1))(x-2)(x-3)}{(-2-1)(-2-(-1))(-2-2)(-2-3)} = \frac{(x-1)(x+1)(x-2)(x-3)}{60}$$

Interpolacja Lagrange'a

$$l_3(x) = \frac{(x-1)(x-(-1))(x-(-2))(x-3)}{(2-1)(2-(-1))(2-(-2))(2-3)} = \frac{(x-1)(x+1)(x+2)(x-3)}{-12}$$
$$l_4(x) = \frac{(x-1)(x-(-1))(x-(-2))(x-2)}{(3-1)(3-(-1))(3-(-2))(3-2)} = \frac{(x-1)(x+1)(x+2)(x-2)}{40}$$

Stąd, na podstawie formuły (6.2) otrzymujemy, że:

$$\begin{aligned} W_4(x) &= -2 \cdot l_0(x) + 0 \cdot l_1(x) + 1 \cdot l_2(x) + 3 \cdot l_3(x) + 4 \cdot l_4(x) \\ &= \frac{(x+1)(x+2)(x-2)(x-3)}{-6} + \frac{(x-1)(x+1)(x-2)(x-3)}{60} \\ &+ \frac{(x-1)(x+1)(x+2)(x-3)}{-4} + \frac{(x-1)(x+1)(x+2)(x-2)}{10} \end{aligned}$$

Uwaga. Ponieważ $y_1 = 0$, to można było pominąć obliczenia funkcji $l_1(x)$.

Interpolacja Newtona

Twierdzenie 6.2 (Konstrukcja wielomianu Newtona)

Każdy wielomian W_n stopnia co najwyżej n, który spełnia warunek (6.1) można przedstawić jednoznacznie w postaci:

$$\begin{aligned} W_n(x) &= c_{0,0} + c_{0,1}(x - x_0) + c_{0,2}(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + \\ &\quad + c_{0,n}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}) \end{aligned} \tag{6.4}$$

gdzie współczynniki $c_{0,0}, c_{0,1}, \ldots, c_{0,n}$ wyznaczamy na podstawie wzoru:

$$c_{i,j} = \begin{cases} y_i & ,j = 0 \\ \frac{c_{i+1,j-1} - c_{i,j-1}}{x_{i+j} - x_i} & ,j = 1, \ldots, n \end{cases} \tag{6.5}$$

Interpolacja Newtona

Dla $n = 4$, czyli pięciu węzłów tablica współczynników wygląda następująco:

$$
\begin{array}{llllllllll}
x_0 & c_{0,0} = y_0 & \longrightarrow & c_{0,1} = \frac{c_{1,0}-c_{0,0}}{x_1-x_0} & \longrightarrow & c_{0,2} = \frac{c_{1,1}-c_{0,1}}{x_2-x_0} & \longrightarrow & c_{0,3} = \frac{c_{1,2}-c_{0,2}}{x_3-x_0} & \longrightarrow & c_{0,4} = \frac{c_{1,3}-c_{0,3}}{x_4-x_0} \\
 & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\
x_1 & c_{1,0} = y_1 & \longrightarrow & c_{1,1} = \frac{c_{2,0}-c_{1,0}}{x_2-x_1} & \longrightarrow & c_{1,2} = \frac{c_{2,1}-c_{1,1}}{x_3-x_1} & \longrightarrow & c_{1,3} = \frac{c_{2,2}-c_{1,2}}{x_4-x_1} & & \\
 & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & & \\
x_2 & c_{2,0} = y_2 & \longrightarrow & c_{2,1} = \frac{c_{3,0}-c_{2,0}}{x_3-x_2} & \longrightarrow & c_{2,2} = \frac{c_{3,1}-c_{2,1}}{x_4-x_2} & & & & \\
 & & \nearrow & & \nearrow & & & & & \\
x_3 & c_{3,0} = y_3 & \longrightarrow & c_{3,1} = \frac{c_{4,0}-c_{3,0}}{x_4-x_3} & & & & & & \\
 & & \nearrow & & & & & & & \\
x_4 & c_{4,0} = y_4 & & & & & & & &
\end{array}
$$

Interpolacja Newtona

Przykład 6.2:
Funkcja podana w tabeli opisuje zmianę PKB państwa Numerica w kolejnych latach panowania króla Wielomianosława III (rachunki dla czwartego roku nie zostały przeprowadzone, gdyż kanclerz został ścięty za doprowadzenie do kryzysu w trzecim roku, a szukanie chętnego na zwolnione stanowisko trochę potrwało). Wyznaczyć wielomian interpolacyjny Newtona dla funkcji podanej w tabeli i podać prognozę wzrostu PKB (i szans przeżycia nowego kanclerza) na siódmy rok panowania Wielomianosława III.

x	1	2	3	5	6
$f(x)$	$+3\%$	$+2\%$	-1%	$+0\%$	$+1\%$

Rozwiązanie:
Rozpoczynamy od wyznaczenia tablicy współczynników, korzystając ze wzorów (6.5).

Interpolacja Newtona

$$
\begin{array}{llllllllll}
1 & 3 & \longrightarrow & \frac{2-3}{2-1} = -1 & \longrightarrow & \frac{-3-(-1)}{3-1} = -1 & \longrightarrow & \frac{\frac{7}{6}-(-1)}{5-1} = \frac{13}{24} & \longrightarrow & \frac{-\frac{1}{4}-\frac{13}{24}}{6-1} = -\frac{19}{120} \\
 & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\
2 & 2 & \longrightarrow & \frac{-1-2}{3-2} = -3 & \longrightarrow & \frac{\frac{1}{2}-(-3)}{5-2} = \frac{7}{6} & \longrightarrow & \frac{\frac{1}{6}-\frac{7}{6}}{6-2} = -\frac{1}{4} & & \\
 & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & & \\
3 & -1 & \longrightarrow & \frac{0-(-1)}{5-3} = \frac{1}{2} & \longrightarrow & \frac{1-\frac{1}{2}}{6-3} = \frac{1}{6} & & & & \\
 & & \nearrow & & \nearrow & & & & & \\
5 & 0 & \longrightarrow & \frac{1-0}{6-5} = 1 & & & & & & \\
 & & \nearrow & & & & & & & \\
6 & 1 & & & & & & & &
\end{array}
$$

Stosując wzór (6.4) otrzymujemy:

$$
f(x) = 3 - 1\cdot(x-1) - 1\cdot(x-1)(x-2) + \frac{13}{24}\cdot(x-1)(x-2)(x-3) - \frac{19}{120}\cdot(x-1)(x-2)(x-3)(x-5).
$$

Interpolacja Newtona

Stąd

$$f(7) = 3 - 6 - 30 + \frac{13}{24} \cdot 120 - \frac{19}{120} \cdot 240 = -33 + 65 - 38 = -6.$$

Zatem prognoza zmiany PKB państwa Numerica na 7 rok to -6%. Nie są to dobre wieści dla nowego kanclerza.

Interpolacja wielomianowa

Uwaga 6.1

Wielomian interpolacyjny Lagrange'a i wielomian interpolacyjny Newtona są identyczne, choć różnią się postacią.

Uwaga 6.2

Jeżeli do węzłów interpolacji dołączymy jeszcze jeden (np. w wyniku uzyskania nowego pomiaru), to:

- obliczenia metodą interpolacji Lagrange'a trzeba będzie wykonać od nowa
- w interpolacji Newtona nie musimy przeprowadzać obliczeń od nowa, wystarczy dopisać rezultaty na dole dwu pierwszych kolumn i w każdej kolejnej kolumnie obliczyć jeden dodatkowy element

Interpolacja Hermite'a

Interpolacja Hermite'a pozwala na skonstruowanie wielomianu, który nie tylko przyjmuje zadane wartości w danych punktach (jak poprzednio), ale także jego pochodne mają zadane wartości.

x_i	x_0	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
$f_i = f(x_i)$	f_0	f_1	f_2	$\ldots$	f_n
$f_i' = f'(x_i)$	f_0'	f_1'	f_2'	$\ldots$	f_n'

Interpolacja Hermite'a

Twierdzenie 6.3 (Konstrukcja wielomianu Hermite'a)

Każdy wielomian W_{2n+1} stopnia co najwyżej $2n+1$-ego, który spełnia warunek (6.1) oraz taki, że $W'_{2n+1}(x_i) = f'(x_i)$ dla $i = 1, \ldots, n$ można przedstawić jednoznacznie w postaci:

(6.9)

$$\begin{aligned} W_{2n+1}(x) = {} & c_{0,0} + c_{0,1} \cdot (x - x_0) + c_{0,2} \cdot (x - x_0)^2 + c_{0,3} \cdot (x - x_0)^2 (x - x_1) \\ & + \ldots + c_{0,2n+1}(x - x_0)^2 (x - x_1)^2 \ldots (x - x_{n-1})^2 (x - x_n) \end{aligned}$$

gdzie współczynniki $c_{0,0}, c_{0,1}, \ldots, c_{0,2n+1}$ wyznaczamy na podstawie wzoru:

(6.10)
$$c_{i,j} = \begin{cases} y_{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor} & , j = 0 \\ f'(x_i) & , j = 1, \ldots, n \wedge \left\lfloor \frac{i+j}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor \\ \dfrac{c_{i+1,j-1} - c_{i,j-1}}{x_{\lfloor \frac{i+j}{2} \rfloor} - x_{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}} & , j = 1, \ldots, n \wedge \left\lfloor \frac{i+j}{2} \right\rfloor \neq \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor \end{cases}$$

dla $i = 0, \ldots, 2n+1$ oraz $j = 0, \ldots, 2n+1$, gdzie $\lfloor x \rfloor$ to cecha z liczby x, czyli największa liczba całkowita nie większa od liczby x.

Interpolacja Hermite'a

Dla $n = 2$, czyli trzech węzłów tablica współczynników wygląda nastepująco:

$$
\begin{array}{llclclclclcl}
x_0 & c_{0,0} = y_0 & \rightarrow & \boxed{c_{0,1} = f'(x_0)} & \rightarrow & c_{0,2} = \frac{c_{1,1} - c_{0,1}}{x_1 - x_0} & \rightarrow & c_{0,3} = \frac{c_{1,2} - c_{0,2}}{x_1 - x_0} & \rightarrow & c_{0,4} = \frac{c_{1,3} - c_{0,3}}{x_2 - x_0} & \rightarrow & c_{0,5} = \frac{c_{1,4} - c_{0,4}}{x_2 - x_0} \\
 & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\
x_0 & c_{1,0} = y_0 & \rightarrow & c_{1,1} = \frac{c_{2,0} - c_{1,0}}{x_1 - x_0} & \rightarrow & c_{1,2} = \frac{c_{2,1} - c_{1,1}}{x_1 - x_0} & \rightarrow & c_{1,3} = \frac{c_{2,2} - c_{1,2}}{x_2 - x_0} & \rightarrow & c_{1,4} = \frac{c_{2,3} - c_{1,3}}{x_2 - x_0} & & \\
 & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & & \\
x_1 & c_{2,0} = y_1 & \rightarrow & \boxed{c_{2,1} = f'(x_1)} & \rightarrow & c_{2,2} = \frac{c_{3,1} - c_{2,1}}{x_2 - x_1} & \rightarrow & c_{2,3} = \frac{c_{3,2} - c_{2,2}}{x_2 - x_1} & & & & \\
 & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & & & & \\
x_1 & c_{3,0} = y_1 & \rightarrow & c_{3,1} = \frac{c_{4,0} - c_{3,0}}{x_2 - x_1} & \rightarrow & c_{3,2} = \frac{c_{4,1} - c_{3,1}}{x_2 - x_1} & & & & & & \\
 & & \nearrow & & \nearrow & & & & & & & \\
x_2 & c_{4,0} = y_2 & \rightarrow & \boxed{c_{4,1} = f'(x_2)} & & & & & & & & \\
 & & \nearrow & & & & & & & & & \\
x_2 & c_{5,0} = y_2 & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

Interpolacja Hermite'a

Uwaga 6.4

Sposób wyznaczania wielomianu interpolacyjnego Hermite'a jest analogiczny do standardowej interpolacji Newtona z tą różnicą, że każdy węzeł w którym mamy podaną wartość pochodnej zapisywany jest dwukrotnie, zaś w przypadku otrzymania podczas obliczeń symbolu nieoznaczonego $\left[\frac{0}{0}\right]$, zastępujemy go wartością pochodnej w danym węźle. Ponieważ niektóre węzły zapisywane są dwukrotnie również postać wielomianu jest nieco inna. Dlatego w metodzie Hermite'a należy korzystać ze wzoru (6.9) przy podawaniu ostatecznej postaci wielomianu.

Przykład 6.3:
Wyznaczyć wielomian interpolacyjny Hermite'a, spełniający podane warunki:

x_i	-1	0	1
$f_i = f(x_i)$	-8	-2	-4
$f_i' = f'(x_i)$	12	1	-2

Rozwiązanie: Rozpoczynamy od wyznaczenia tablicy współczynników, korzystając ze wzorów (6.10):

Interpolacja Hermite'a

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
-1 & -8 & \to & f'(-1) = 12 & \to & \frac{6-12}{0-(-1)} = -6 & \to & \frac{-5-(-6)}{0-(-1)} = 1 & \to & \frac{1-1}{1-(-1)} = 0 & \to & \frac{1-0}{1-(-1)} = \frac{1}{2} \\
 & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\
-1 & -8 & \to & \frac{-2-(-8)}{0-(-1)} = 6 & \to & \frac{1-6}{0-(-1)} = -5 & \to & \frac{-3-(-5)}{1-(-1)} = 1 & \to & \frac{3-1}{1-(-1)} = 1 & & \\
 & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & & \\
0 & -2 & \to & f'(0) = 1 & \to & \frac{-2-1}{1-0} = -3 & \to & \frac{0-(-3)}{1-0} = 3 & & & & \\
 & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & & & & \\
0 & -2 & \to & \frac{-4-(-2)}{1-0} = -2 & \to & \frac{-2-(-2)}{1-0} = 0 & & & & & & \\
 & & \nearrow & & \nearrow & & & & & & & \\
1 & -4 & \to & f'(1) = -2 & & & & & & & & \\
 & & \nearrow & & & & & & & & & \\
1 & -4 & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

Zgodnie ze wzorem (6.9) zapisujemy wielomian interpolacyjny:

$$
\begin{aligned}
W_5(x) &= -8 + 12 \cdot (x+1) - 6 \cdot (x+1) \cdot (x+1) + 1 \cdot (x+1) \cdot (x+1) \cdot x \\
&\quad + 0 \cdot (x+1) \cdot (x+1) \cdot x \cdot x + \frac{1}{2} \cdot (x+1) \cdot (x+1) \cdot x \cdot x \cdot (x-1) \\
&= -8 + 12 \cdot (x+1) - 6 \cdot (x+1)^2 + (x+1)^2 x + \frac{1}{2} \cdot (x+1)^2 x^2 (x-1)
\end{aligned}
$$

Interpolacja Hermite'a

Uwaga 6.5

Schemat interpolacji Hermite'a zachowa swoją strukturę, jeżeli wartości pochodnych będą zadane tylko w niektórych węzłach interpolacyjnych.

Przykład 6.4:

Wyznaczyć wielomian interpolacyjny Hermite'a, spełniający podane warunki:

x_i	-1	0	1
$f_i = f(x_i)$	-8	-2	-4
$f_i' = f'(x_i)$		1	

Interpolacja Hermite'a

Rozwiązanie:
Zauważmy, że w podanej tabeli wymagamy zgodności pochodnej tylko w jednym węźle interpolacji tzn. w $x_1 = 0$. Stąd tylko ten węzeł podwajamy w schemacie.

$$
\begin{array}{llllllll}
-1 & -8 & \rightarrow & \frac{-2-(-8)}{0-(-1)} = 6 & \rightarrow & \frac{1-6}{0-(-1)} = -5 & \rightarrow & \frac{-3-(-5)}{1-(-1)} = 1 \\
 & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\
0 & -2 & \rightarrow & f'(0) = 1 & \rightarrow & \frac{-2-1}{1-0} = -3 & & \\
 & & \nearrow & & \nearrow & & & \\
0 & -2 & \rightarrow & \frac{-4-(-2)}{1-0} = -2 & & & & \\
 & & \nearrow & & & & & \\
1 & -4 & & & & & &
\end{array}
$$

Zgodnie ze wzorem (6.9) zapisujemy wielomian interpolacyjny:

$$W_5(x) = -8 + 6 \cdot (x+1) - 5 \cdot (x+1)x + 1 \cdot (x+1)x^2.$$