Metody iteracyjne dla układów równań liniowych

Wykład z przedmiotu Metody numeryczne

Jakub Bielawski
Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

5 listopada 2016

Plan

Zagadnienie:

Znaleźć przybliżone rozwiązanie układu równań liniowych postaci

$$AX = B$$

Podstawowe pytania:

1. Dlaczego warto stosować metody iteracyjne?
2. Jak skonstruować ciąg iteracji?
3. Jak długo wykonywać iteracje?

Plan:

1. Metoda iteracji prostej
2. Metoda iteracji Seidela
3. Zbieżność metod iteracyjnych i warunek stopu

$$(3.1) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{cases}$$

$$(3.2) \qquad \begin{cases} x_1 &= c_1 + d_{12}x_2 + d_{13}x_3 + \ldots + d_{1n}x_n \\ x_2 &= c_2 + d_{21}x_1 + d_{23}x_2 + \ldots + d_{2n}x_n \\ \vdots & \vdots \\ x_n &= c_n + d_{n1}x_1 + d_{n2}x_2 + \ldots + d_{n-1\ n}x_{n-1} \end{cases}$$

gdzie $c_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$ oraz $d_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}$ dla $i, j = 1, \ldots, n$, $j \neq i$
Równoważnie:

$$X = C + D \cdot X$$

Metoda iteracji prostej

$$X^{(n+1)} = C + D \cdot X^{(n)}, \tag{3.3}$$

gdzie za przybliżenie początkowe $X^{(0)}$ można przyjąć dowolny wektor.

Twierdzenie 3.1

Jeżeli ciąg $(X^{(n)})$ jest zbieżny, to jego granica jest rozwiązaniem układu równań (3.2) (równoważnie rozwiązaniem układu (3.1)).

Przykład 3.1

Metodą iteracji prostej znaleźć pierwsze dwa przybliżenia rozwiązania układu równań:

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + 10x_2 - 3x_3 = 10 \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 12 \end{cases}$$

Niech

$$D = L + U,$$

gdzie L jest macierzą dolnie-trójkątną założoną z elementów macierzy D znajdujących się pod przekątną, natomiast U jest macierzą górnie-trójkątną założoną z elementów macierzy D znajdujących się nad przekątną.

Metoda iteracji Seidela

$$X^{(n+1)} = C + L \cdot X^{(n+1)} + U \cdot X^{(n)}, \tag{3.4}$$

gdzie za przybliżenie początkowe $X^{(0)}$ można przyjąć dowolny wektor.

Przykład 3.2
Metodą iteracji Seidela znaleźć pierwsze dwa przybliżenia rozwiązania układu równań:

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + 10x_2 - 3x_3 = 10 \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 12 \end{cases}$$

Twierdzenie 3.2

Ciąg kolejnych przybliżeń (3.3) (oraz (3.4)) dla układu równań (3.1) jest zbieżny, jeśli zachodzi którykolwiek z poniższych warunków:

1. macierz A jest przekątniowo dominująca, tzn.:

$$\forall i \in \{1,\ldots,k\} : \sum_{j=1, j\neq i}^{k} |a_{ij}| < |a_{ii}|,$$

lub równoważnie: $$\forall i \in \{1,\ldots,k\} : \sum_{j=1, j\neq i}^{k} |d_{ij}| < 1;$$

2. macierz A jest słabo przekątniowo dominująca, tzn.:

$$\forall i \in \{1,\ldots,k\} : \sum_{j=1, j\neq i}^{k} |a_{ij}| \leqslant |a_{ii}| \wedge \exists i \in \{1,\ldots,k\} : \sum_{j=1, j\neq i}^{k} |a_{ij}| < |a_{ii}|;$$

3. macierz A jest symetryczna i dodatnio określona.

Przykład 3.3 (cd. Przykładu 3.1)
Sprawdzić, czy metoda iteracyjna dla podanego układu równań będzie zbieżna:

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + 10x_2 - 3x_3 = 10 \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 12 \end{cases}$$

Definicja 3.1 (Norma macierzy)

Niech A będzie macierzą kwadratową stopnia n. Normę macierzy A wyznacza każde z podanych wyrażeń:

1. norma kolumnowa
$$\|A\|_1 = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$
2. norma wierszowa
$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$
3. norma euklidesowa
$$\|A\|_e = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right)^{1/2}$$

Twierdzenie 3.3

Załóżmy, że metoda iteracji dla układu równań (3.1) jest zbieżna, zaś wektor $\bar{X}$ jest jego rozwiązaniem dokładnym. Wtedy:

$$\forall k \in \mathbb{N} : \|\bar{X} - X^{(k)}\| \leqslant \frac{\|D\|^{k+1}}{1 - \|D\|} \cdot \|X^{(1)} - X^{(0)}\|.$$

Wniosek 3.1

Jeśli $\varepsilon > 0$ jest zadaną dokładnością rozwiązania iteracyjnego oraz $k \in \mathbb{N}$ jest liczbą, dla której:

$$\frac{\|D\|^{k+1}}{1 - \|D\|} \cdot \|X^{(1)} - X^{(0)}\| < \varepsilon,$$

to wektor X^k przybliża rozwiązanie dokładne $\bar{X}$ z dokładnością ε.

Przykład 3.4 (cd. Przykładu 3.1)
Która iteracja dla układu przybliży rozwiązanie z dokładnością $\varepsilon = 10^{-5}$?

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + x_3 &= 5 \\ x_1 + 10x_2 - 3x_3 &= 10 \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 &= 12 \end{cases}$$