Egzamin z algebry liniowej II termin – grupa A 3 marzec 2015

Imię i Nazwisko: ____________________

Nr grupy i nr indeksu: ____________________

Zadanie	1	2	3	4	5	6	7	Suma
Punktacja	5	5	5	5	10	10	10	50
Wynik								

1. Podczas trwania egzaminu wolno korzystać jedynie z kalkulatora prostego, narzędzi do pisania i materiałów otrzymanych od przeprowadzających egzamin. Wszelkie przedmioty poza wspomnianymi powinny być pozostawione w torbach/plecakach we wskazanym przez egzaminujących miejscu. W szczególności nie wolno używać (mieć przy sobie) telefonu komórkowego ani własnych kartek.
2. Wszystkie kartki z rozwiązaniami należy podpisać imieniem i nazwiskiem.
3. Egzamin trwa 105 minut
4. W zadaniach 1-4 podaj w polu ________ (bez uzasadnienia) właściwe odpowiedzi. Zadania 5-7 rozwiąż na osobnej kartce.

Zadania

1. (5 punktów) Niech $S \subset \mathbb{R}^2$. Które stwierdzenia są prawdziwe?

   A. Jeśli S jest relacją obojętności, to jest relacją preferencji.

   B. Jeśli S jest relacją preferencji, to $\{(x,x)\colon\ x \in \mathbb{R}\} \subset S$.

   C. Jeśli S jest relacją preferencji, to nie jest relacją obojętności.

   D. Jeśli S jest relacją preferencji oraz $\{(1,2),(2,3)\} \subset S$, to $(1,3) \in S$.

   1. ____________

2. (5 punktów) Rozpatrzmy zbiór wektorów $\mathcal{B} = \{x, y, z\}$, gdzie

$$x = \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix}2\\5\\0\end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix}0\\a\\5\end{bmatrix}.$$

   gdzie a jest parametrem. Które stwierdzenia są prawdziwe?

A. $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} x & x+y & x \end{bmatrix} = 1.$

B. Dla $a = 0$ macierz

$$M = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$$

jest określona dodatnio.

C. $\exists_{a\in\mathbb{R}}\ ||z|| \leq 5.$

D. Dla $a = 1$ zbiór $\mathcal{B}$ stanowi układ liniowo zależny.

2. ____________

3. (5 punktów) Niech $\Gamma = \left\{ A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} :\ a, b, c \in \mathbb{R},\ A^2 = I \right\}$. Które stwierdzenia są prawdziwe?

A. $A^3(A^T)^3A^{2015} = A^{-1}$ dla dowolnej $A \in \Gamma$,

B. macierz A^6 jest dodatnio określona dla dowolnej $A \in \Gamma$,

C. Jeśli $\lambda \in \mathbb{C}$ jest wartością własną macierzy $A \in \Gamma$, to $\operatorname{Im}\lambda = 0$.

D. $\forall_{A\in\Gamma}\ \exists_{x\in\mathbb{R}^n, x\neq 0}:\quad (a, b, c \geq 0,\ a + b = b + c = 1) \Rightarrow Ax = x.$

3. ____________

4. (5 punktów) Niech $B = \{z \in \mathbb{C}\colon\ \operatorname{Arg} z \in \left[\pi, \frac{5\pi}{4}\right], 2 \leq |z + 3 + i| \leq 4\}$.

A. $\forall_{z\in\mathbb{C}}\ z \in B \Rightarrow \overline{z} \in B,$

B. $\exists_{z\in B}\ z^3 + z = 0,$

C. $\forall_{z\in B}\ z + 10i \in B^c,$

D. $\forall_{z\in\mathbb{C}}\ z \in B \Rightarrow \operatorname{Re} z \geq 0.$

4. ____________

5. (10 punktów) Dane jest odwzorowanie liniowe $S(x_1, x_2) = (3x_1, x_1 + x_2)$. Wyznacz $T\colon \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, jeśli $M_{T\circ S}$ spełnia równanie

$$\left(M_{T\circ S} - \frac{1}{12}M_S\right)^{-1} = \left(\det\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 120 & 4 & 0 & 0 \\ -52 & 14 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 11 & 12 & 13 & 1 \end{bmatrix}\right)\cdot\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}^T\right)^T + 6R_{\frac{\pi}{2}},$$

gdzie $R_{\frac{\pi}{2}}$ jest macierzą obrotu o kąt $\frac{\pi}{2}$. Sprawdź czy T jest izomorfizmem.

6. (10 punktów) Wykorzystując metodę Gaussa-Jordana rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + 4x_5 = 1 \\ 4x_1 + 4x_2 + 8x_3 - 4x_4 = 4. \end{cases}$$

7. (10 punktów) Wyznacz wektory i wartości własne macierzy $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$. Zapisz wektor $v = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$ jako kombinację liniową dwóch wybranych wektorów własnych tej macierzy.