Egzamin z algebry liniowej I termin – grupa A 9 luty 2015

Imię i Nazwisko: ____________________

Nr grupy i nr indeksu: ____________________

Zadanie	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Suma
Punktacja	5	5	5	5	5	5	10	10	10	60
Wynik										

1. Podczas trwania egzaminu wolno korzystać jedynie z kalkulatora prostego, narzędzi do pisania i materiałów otrzymanych od przeprowadzających egzamin. Wszelkie przedmioty poza wspomnianymi powinny być pozostawione w torbach/plecakach we wskazanym przez egzaminujących miejscu. W szczególności nie wolno używać (mieć przy sobie) telefonu komórkowego ani własnych kartek.
2. Wszystkie kartki z rozwiązaniami należy podpisać imieniem i nazwiskiem.
3. Egzamin trwa 105 minut
4. W zadaniach 1-6 podaj (bez uzasadnienia) właściwe odpowiedzi. Zadania 7-9 rozwiąż na osobnej kartce.

Zadania

1. (5 punktów) Rozpatrzmy układ równań liniowych

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Które stwierdzenia są prawdziwe?

A. Układ jest sprzeczny.

B. Układ posiada dokładnie jedno rozwiązanie.

C. Rząd macierzy współczynników wynosi 3.

D. Dokładnie jeden wiersz macierzy współczynników jest liniowo zależny od pozostałych wierszy.

1. ____________

2. (5 punktów) Dane są funkcje $f(x) = \arcsin x$, $g(x) = 2^x$. Które stwierdzenia są prawdziwe?

A. $f \circ g$ istnieje,

B. $(f \circ g)^{-1}(x) = \sin \log_2 x$,

C. $(g^{-1} \circ f)(x) = \log_2 \arcsin x$,

D. $g \circ f$ nie istnieje.

2. ______________

3. (5 punktów) Rozpatrzmy zbiór wektorów $\mathcal{B} = \{x, y, z\}$, gdzie

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

gdzie a jest parametrem. Które stwierdzenia są prawdziwe?

A. Dla $a = 1$ macierz

$$M = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$$

jest określona ujemnie.

B. $\forall_{a \in \mathbb{R}} \; ||z|| \geq 1$.

C. Dla $a = 0$ układ $\mathcal{B}$ stanowi układ liniowo niezależny.

D. rank $\begin{bmatrix} x & x+y & x \end{bmatrix} = 1$.

3. ______________

4. (5 punktów) W pewnym kraju w 300-osobowym parlamencie wszystkie mandaty dzielą między siebie dwie partie: Unia Algebraików oraz Sojusz Logików. Wiemy, że co roku $\frac{1}{3}$ posłów Unii Algebraików przenosi się do Sojuszu Logików. Podobnie w każdym roku $\frac{1}{3}$ posłów Sojuszu Logików staje się posłami Unii Algebraików. Które stwierdzenia są prawdziwe?

A. Układ osiąga stan równowagi gdy wszystkie mandaty należą do Sojuszu Logików.

B. Układ osiąga stan równowagi gdy Unia Algebraików ma dokładnie 150 posłów.

C. Układ osiąga stan równowagi gdy posłów Unii Algebraików jest dwa razy więcej niż posłów Sojuszu Logików.

D. Stanem granicznym tego układu jest jego stan równowagi.

4. ______________

5. (5 punktów) Dane są odwzorowania $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 0)$, $S(x_1, x_2) = (x_1, 2x_1 - x_2)$. Które stwierdzenia są prawdziwe?

A. $M_{T \circ S}$ jest nieosobliwa.

B. rank $M_T = 1$.

C. $S + T$ jest izomorfizmem.

D. odwzorowanie R zadane wzorem $R(x_1, x_2) = T(S(x_1, x_2)) + (1, 0)$ nie jest odwzorowaniem liniowym.

5. ______________

6. (5 punktów) Niech $A \in M(3,3)$, zaś jej wartości własne to $-1, 0, 2$. Które stwierdzenia są prawdziwe?

A. Macierz $A^T - 4I$ jest określona ujemnie,

B. Suma wartości własnych macierzy A^TA wynosi 5,

C. $\det(A(A^T + I)) = 1$,

D. Jeśli A jest symetryczna, to wartości własne macierzy A^TA to $0, 1, 4$.

6. ______

7. (10 punktów) Rozwiąż równanie macierzowe

$$\left(\det\begin{bmatrix} -2 & 3 & 15 & 2 \\ 0 & \frac{1}{8} & 18 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\right) \cdot X^T \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} + 2I\right) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}^T\right)^T.$$

8. (a) (5 punktów) Zaznacz na płaszczyźnie zespolonej zbiór

$$A = \{z \in \mathbb{C}:\ \operatorname{Arg} z \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}\right], 1 \leq |z - 2i| < 4\}.$$

(b) (5 punktów) Wyznacz pierwiastki równania $z^3 = i + \sqrt{3}$.

9. (10 punktów) Przedstaw w postaci $PD_\Lambda P^{-1}$ macierz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$