1. Rozpatrzmy układ równań
$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$
Które stwierdzenia są prawdziwe?
   (a) Układ jest sprzeczny.
   (b) Układ posiada dokładnie jedno rozwiązanie.
   (c) Układ posiada nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od 1 parametru.
   (d) Układ posiada nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od 2 parametrów.
   (e) Macierz współczynników tego układu jest macierzą schodkową zredukowaną.

2. Rozpatrzmy zbiór wektorów $\mathcal{B} = \{x, y, z\}$, gdzie
$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{bmatrix}.$$
gdzie a jest parametrem. Które stwierdzenia są prawdziwe?
   (a) $\mathcal{B}$ jest zbiorem liniowo niezależnym dla dowolnych wartości a.
   (b) $\mathcal{B}$ jest zbiorem liniowo niezależnym wtedy i tylko wtedy, gdy $a = 3$.
   (c) $\mathcal{B}$ jest zbiorem liniowo niezależnym, gdy $a \neq 3$.
   (d) Jeśli $||z|| \leq 1$, to $h \leq 0$.
   (e) Żadne z powyższych zdań nie jest prawdziwe.

3. Rozpatrzmy macierz
$$A = \begin{bmatrix} 5 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 9 \end{bmatrix}.$$
Które stwierdzenia są prawdziwe?
   (a) $\lambda = 4$ jest wartością własną macierzy A.
   (b) $\lambda = 10$ nie jest wartością własną macierzy A.
   (c) A nie jest diagonalizowalna.
   (d) macierz wektorów własnych $\begin{bmatrix} -\sqrt{5} & 1 \\ 1 & \sqrt{5} \end{bmatrix}$ jest ortogonalna.
   (e) Norma wektora własnego $\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{5} \end{bmatrix}$ wynosi $\sqrt{5}$.

4. Agencja wynajmu rowerów miejskich RowerGeek posiada dwie lokalizacje w pewnym mieście, jedną na głównym placu miasta, drugą na kampusie uniwersyteckim. Niech x_t oznacza liczbę rowerów znajdujących się na kampusie uniwersyteckim po t dniach, zaś y_t liczbę rowerów pozostawionych w stacji przy głównym placu. Zakładamy, że rozkład rowerów dany jest poprzez następujący model:
$$\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{bmatrix}, \quad \text{gdzie} \quad A = \begin{bmatrix} 0,97 & 0,02 \\ 0,03 & 0,98 \end{bmatrix}.$$
Które stwierdzenia są prawdziwe?
   (a) Układ osiąga stan równowagi gdy 30% rowerów znajduje się na kampusie.

(b) Układ osiąga stan równowagi gdy 40% rowerów znajduje się na kampusie.
(c) Układ osiąga stan równowagi gdy 50% rowerów znajduje się na kampusie.
(d) Układ osiąga stan równowagi gdy 60% rowerów znajduje się na kampusie.
(e) Stanem granicznym tego układu jest jego stan równowagi.

5. Dana jest forma kwadratowa
$$Q(x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2.$$
Które stwierdzenia są prawdziwe?
(a) Q jest dodatnio półokreślona, ale nie jest dodatnio określona.
(b) Q jest ujemnie półokreślona, ale nie jest ujemnie określona.
(c) Q jest wypukła.
(d) Q jest dodatnio określona.
(e) Macierz formy Q jest symetryczna.

6. Niech $u = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}^T$, $v = \begin{bmatrix}1 & -2 & a\end{bmatrix}^T$, $w = \begin{bmatrix}b & -2 & 0\end{bmatrix}^T$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$. Zdefiniujmy
$$M_1 = \begin{bmatrix}u & v & u+2v\end{bmatrix}, \ \ M_2 = \begin{bmatrix}u & w & v\end{bmatrix} \ \text{ oraz } \ \tilde{M} = \begin{bmatrix}\frac{u}{||u||} & \frac{v}{||v||} & \frac{w}{||w||}\end{bmatrix}.$$
Które stwierdzenia są prawdziwe?
(a) Jeśli $a = 1$, to $rank M_1 = 3$.
(b) $rank M_1 = 2$ dla $a \neq 1$ oraz $\lambda = 0$ nie jest wartością własną tej macierzy.
(c) $M_1 + M_2$ jest macierzą nieosobliwą dla $a \neq 0$ i $b \neq 4$.
(d) Dla $a = 1$ istnieje takie $b \in \mathbb{R}$, że $\tilde{M}^T \cdot \tilde{M} = I$.
(e) $\forall_{b\in\mathbb{R}} \exists_{a\in\mathbb{R}}: \ v \perp w$.

7. Wyznacz $M_{T\circ S}$ jeśli $T(x_1, x_2) = (2x_1, x_1 - x_2)$, zaś S jest obrotem o kąt $\frac{\pi}{3}$. Czy $T \circ S$ jest izomorfizmem? Jeśli tak, wyznacz $(T \circ S)^{-1}$.

8. Niech $A \in M(n, n)$ będzie macierzą symetryczną. Uzasadnij, że jeśli A jest dodatnio określona, to A^{-1} też musi być dodatnio określona.

9. Niech $A \in M(m, n)$, gdzie $m > n$. Uzasadnij, że $A \cdot A^T$ nie może być dodatnio określona.

10. Niech $A, B \in M(4, 4)$, $C \in M(4, 5)$, $D \in M(4, 6)$. Podaj wymiar macierzy $M = (ABA^2B^3ACC^TD)^TD$.

11. Dla jakich wartości x macierz $\begin{bmatrix}\log_2 x & 1 & \arcsin(x-3) \\ 1 & 1 & 0 \\ \arcsin(x-3) & 0 & 0\end{bmatrix}$ jest dodatnio określona.

12. Niech
$$\begin{bmatrix}1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6\end{bmatrix}.$$
Znajdź wartości własne macierzy A^TA oraz AA^T. Dla obu macierzy znajdź ortonormalne wektory własne.

13. Niech
$$\begin{bmatrix}0 & -1 \\ 4 & 0\end{bmatrix}.$$
Znajdź wartości i wektory własne tej macierzy. Zapisz wektor $\begin{bmatrix}2 \\ 0\end{bmatrix}$ jako kombinację liniową tych wektorów.

14. Zaznacz na płaszczyźnie zespolonej zbiór

$$A = \{z \in \mathbb{C}\colon\ \operatorname{Arg} z \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right), 1 \le |z+i| \le 3\}.$$

15. Oblicz w zbiorze liczb zespolonych
    (a) $\sqrt[8]{256}$,
    (b) $\frac{(1+i)^{20}}{(1-i\sqrt{3})^8}$.

16. Dane są funkcje

$$f(x) = \arcsin x,\quad g(x) = \sqrt{x},\quad h(x) = \log_7(x-5).$$

   (a) Wyznacz (jeśli to możliwe) $g \circ f \circ h$.
   (b) Wyznacz dziedzinę funkcji $f \circ g \circ h$.
   (c) Wyznacz wzór na $(f \circ h)^{-1}$.

17. Rozwiąż układ równań za pomocą metody Gaussa-Jordana:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 6x_4 - 7x_5 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 2 \end{cases}$$

18. Niech u będzie unormowanym wektorem w $\mathbb{R}^n$, zatem $u^T u = 1$. Zdefiniujmy symetryczną macierz $n \times n$; $H = I - 2uu^T$.
    (a) Pokaż, że $H^2 = I$.
    (b) Uzasadnij, że H jest ortogonalna.
    (c) Jednym z wektorów własnych macierzy H jest u. Znajdź związaną z nim wartość własną.