1 Równanie różnicowe

W ekonomii bardzo często mamy do czynienia z sytuacją, gdy obserwujemy pewien aktualny stan gospodarki/firmy/zjawiska społecznego i chcielibyśmy przewidzieć jego stan w przyszłości. Obserwacja (przewidywany stan) następuje w chwili $t = 0, 1, 2, \ldots$, gdzie czas liczymy w dniach, tygodniach, miesiącach czy latach. Stan układu w chwili $t = 0$ nazywamy stanem początkowym układu (ozn. u_0). Zmiany opisane za pomocą macierzy, tzw. macierzy przejścia. W chwili $t = 1$ stan w jakim znajduje się badane zjawisko ma postać $u_1 = Au_0$. Postępując tak dalej otrzymujemy, że w chwili $t = k + 1$

$$u_{k+1} = Au_k. \tag{1}$$

Równoważnie równanie (1) możemy zapisać w postaci

$$u_{k+1} = A^{k+1}u_0. \tag{2}$$

Poniżej wprowadzimy kilka użytecznych definicji i twierdzeń oraz omówimy wybrane modele, w których równania różnicowe oraz wektory i wartości własne mogą być użyteczne.

1.1 Definicje

Jeśli układ w chwili $t = k + 1$, $k \in \mathbb{N}$ zadany jest przez równanie różnicowe (1), to stan u_0 nazywamy **stanem początkowym układu (1)**. Macierz A z równania (1) nazywamy **macierzą przejścia Stanem równowagi** układu nazywamy taki wektor x, dla którego $Ax = x$ (a co za tym idzie $A^k x = x$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$). Innymi słowy, stanem równowagi układu jest wektor własny macierzy A związany z wartością własną $\lambda = 1$. **Stanem granicznym** nazywamy stan u_∞ taki, że $\lim\limits_{k\to\infty} A^k u_0 = u_\infty$.

Definicja 1. *Macierz $A = (a_{ij})$ taką, że $a_{ij} > 0$ ($a_{ij} \geqslant 0$) nazywamy* **macierzą dodatnią** *(nieujemną). W szczególności, dla $A \in M(n, 1)$, mówimy o* **wektorze dodatnim** *(nieujemnym).*

Definicja 2. *Liczbę $\bar{\lambda}_A$ nazywamy* **dominującą** *wartością własną macierzy A, jeśli jest ona wartością własną A oraz $|\bar{\lambda}_A| > |\lambda|$ dla dowolnych $\lambda \in \mathbb{C}$ będących wartościami własnymi macierzy A.*

Twierdzenie 1 (Twierdzenie Perrona-Frobeniusa)**.** *Jeśli A jest macierzą dodatnią, to posiada dominującą wartość własną $\bar{\lambda}_A > 0$, którą nazywamy wartością własną Perrona-Frobeniusa. Ponadto każda współrzędna, jednoznacznie wyznaczonego z dokładnością do przemnożenia przez dodatni skalar, wektora własnego v_A związanego z dominującą wartością własną jest dodatnia.*[1]

Definicja 3. *Macierz $A = (a_{ij})_{nn}$ nazywamy* **macierzą Markowa** *jeśli $a_{ij} \geqslant 0$ dla dowolnych $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ oraz $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ dla każdego $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Uwaga 1. *Jeśli A jest macierzą Markowa, to*

a) $\lambda = 1$ jest wartością własną macierzy A,

b) Wektor własny v^1 związany z $\lambda = 1$ jest nieujemny oraz jest stanem równowagi, ponieważ $Av^1 = v^1$,

c) Wszystkie wartości własne spełniają zależność $|\lambda_i| \leqslant 1$ (gdzie $|\cdot|$ oznacza moduł (rzeczywisty lub zespolony)),

d) Jeśli A lub jakakolwiek potęga A jest macierzą dodatnią (wszystkie a_{ij} są dodatnie), to pozostałe wartości własne $|\lambda_i| < 1$. Oznacza to, że $\lambda = 1$ jest wartością własną Perrona-Frobeniusa dla macierzy A, zaś stan $A^k u_0$ zmierza do v^1,

e) stan równowagi jest stanem granicznym.

Twierdzenie 2. *Jeśli moduł każdej wartości własnej macierzy A jest mniejszy od 1, to $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0$.*

[1] To twierdzenie stanowi też fundament działania algorytmu *PageRank* wykorzystywanego przez firmę *Google* w ich wyszukiwarce.

1.2 Modelowanie migracji

Rozpatrzmy następujący problem: interesuje nas migracja z i do województwa małopolskiego. Załóżmy, że

w każdym roku $\frac{1}{10}$ ludzi spoza województwa sprowadza się, a $\frac{1}{5}$ ludzi opuszcza województwo. Rozpoczynamy z y_0 ludzi mieszkających poza województwem oraz z_0 mieszkających w województwie.

Jakie będą konsekwencje tego procesu w wieloletniej perspektywie czasowej?

Po roku liczba osób mieszkających poza i w województwie to y_1, z_1, gdzie

$$y_1 = 0,9y_0 + 0,2z_0,$$

$$z_1 = 0,1y_0 + 0,8z_0,$$

lub

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Macierz ta spełnia dwie własności: wyrazy w każdej kolumnie sumują się do 1 (każdy człowiek albo migruje albo nie) oraz wszystkie wyrazy w macierzy są nieujemne (proporcje ludności muszą być liczbami z przedziału $[0,1]$). Jest to zatem macierz Markowa. Interesuje nas

$$u_k = \begin{bmatrix} y_k \\ z_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}.$$

W tym celu diagonalizujemy macierz $A = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{bmatrix}$:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 0,9-\lambda & 0,2 \\ 0,1 & 0,8-\lambda \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 1,7\lambda + 0,7;$$

$$\lambda_1 = 1 \ \text{ i } \ \lambda_2 = 0,7$$

$$A = PD_\Lambda P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Aby znaleźć $\begin{bmatrix} y_k \\ z_k \end{bmatrix}$ obliczamy

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_k \\ z_k \end{bmatrix} &= A^k \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & 0,7^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \\ &= (y_0 + z_0) \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} + (y_0 - 2z_0)0,7^k \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że ostatnie wyrażenie ma postać $c_1\lambda_1^k v^1 + c_2\lambda_2^k v^2$, gdzie $c_1 = y_0 + z_0$, $c_2 = y_0 - 2z_0$. Dla dużych k czynnik $0,7^k$ będzie bardzo mały. Zatem rozwiązanie będzie bliskie stanowi granicznemu

$$u_\infty = \begin{bmatrix} y_\infty \\ z_\infty \end{bmatrix} = (y_0 + z_0) \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Liczebność populacji wynosi nadal $y_0 + z_0$, ale ostatecznie (w „nieskończonej przyszłości”) $\frac{1}{3}$ populacji będzie mieszkało w Małopolsce, $\frac{2}{3}$ poza. Ma to miejsce niezależnie od początkowego rozkładu tej populacji. Ponadto zauważmy, że jeśli na początku roku startujemy z $\frac{1}{3}$ wewnątrz i $\frac{2}{3}$ poza, to po roku stan jest ten sam:

$$\begin{bmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad Au_\infty = u_\infty.$$

Punkt $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ jest stanem równowagi układu.

Uwaga 2. *Nasz opis był deterministyczny – populacje przemieszczały się w ustalonych proporcjach. Ale jeśli spojrzymy na pojedynczą jednostkę rozpatrywane ułamki stają się prawdopodobieństwami. Z prawdopodobieństwem* $\frac{1}{10}$ *osoba sprowadzi się do Małopolski, z prawdopodobieństwem* $\frac{2}{10}$ *ją opuści. W tym przypadku przemieszczenie jednostki traktuje się jak proces losowy, a macierz* A *nazywana jest macierzą przejścia.*

2 Model Leontiewa

2.1 Model przepływów międzygałęziowych – wprowadzenie

Przedstawimy tzw. model przepływów międzygałęziowych zwany też (od jego twórcy) modelem Leontiewa (w lit. angielskojęzycznej *input-output model*). Za stworzenie tego modelu Wasyl Leontiew otrzymał w 1973 roku (już 4 lata po ustanowieniu nagrody w tej dziedzinie) nagrodę Nobla w dziedzinie ekonomii. Pozwala on na badanie zależności pomiędzy różnymi sektorami (gałęziami) gospodarki. W szczególności, Leontiew zaproponował analizę nakładów i wyników, za pomocą których można wyznaczyć warunki równowagi, zgodnie z którymi sektory gospodarki mają wyniki wystarczające do zaspokojenia wewnętrznych potrzeb innych branż w gospodarce, jak również wszystkich wymagań zewnętrznych przez nieproduktywną część gospodarki/inne gospodarki (w przypadku rozpatrywania zapotrzebowania innych gospodarek).

Stworzymy matematyczny model gospodarki, w którym można będzie, stosując rachunek macierzowy badać zależności pomiędzy sektorami tejże gospodarki. Model ten będzie opisywał jeden aspekt gospodarki – jej zdolność do produkcji rozmaitych dóbr. Należy pamiętać o ograniczeniach tego modelu. Wytwarzane dobra są zazwyczaj produkowane przez wiele firm, a na ogół każda firma wytwarza też rozmaite produkty. Podstawowe uproszczenie polega na tym, że założymy, że gospodarka składa się z n gałęzi (sektorów).[2] Założymy też, że wszystkie firmy wytwarzające dane dobro robią to tak samo efektywnie, a więc nie ma potrzeby rozważania ich osobno, tylko wspólnie w ramach danej gałęzi gospodarki. Przyjmiemy też, że każda gałąź wytwarza tylko jedno dobro, jego wartość jest stała i liczona w jednostkach pieniężnych. Zaletą tego modelu jest fakt, że dopuszcza on interakcje rozmaitych sektorów gospodarki, w tym sensie, że produkt jednego jest surowcem dla innego sektora, albo też produktem końcowym, dla finalnego nabywcy.

Wprowadzony model będzie statyczny, tzn. zakładający, że żadne strukturalne zmiany (np. technologii czy cen) nie mają miejsca. Założenie to jest realistyczne, jeżeli odnosimy się do krótkiego okresu czasu (np. maksimum rok). Następnie rozpatrzymy dynamiczne podejście do problemu.

2.2 Model Leontiewa – model gospodarki otwartej

2.2.1 Ogólny model

Załóżmy, że nasza gospodarka podzielona jest na n gałęzi $S_1, \dots, S_n$ oraz, że mamy dane dotyczące produkcji (a co za tym idzie konsumpcji) dla każdego z sektorów. Dane te zestawiamy w tzw. **macierzy (tabeli) przepływów międzygałęziowych** $Y = (y_{ij})_{nn}$, gdzie $y_{ij} \geqslant 0$ oznacza wielkość konsumpcji produktu j-tego sektora w sektorze i-tym:

[2] Mimo, że modele Leontiew dla rzeczywistych gospodarek zazwyczaj wymagają rozpatrywania dużego n (sam Leontiew rozpatrywał pierwotnie układ z 500 gałęziami zawężając go później do 42 gałęzi), my dla uproszczenia problemu rozpatrywać będziemy na zajęciach $n \leqslant 4$.

$$
\begin{array}{cc}
 & \textbf{produkowane przez gałąź} \\
 & \begin{array}{ccccc} \mathrm{S}_1 & \dots & \mathrm{S}_j & \dots & \mathrm{S}_n \end{array} \\
\begin{array}{c}\textbf{konsumowane} \\ \textbf{przez gałąź}\end{array} \begin{array}{c} S_1 \\ \vdots \\ S_i \\ \vdots \\ S_n \end{array} &
\begin{bmatrix} y_{11} & \dots & y_{1j} & \dots & y_{1n} \\ & & \vdots & & \\ y_{i1} & \dots & y_{ij} & \dots & y_{in} \\ & & \vdots & & \\ y_{n1} & \dots & y_{nj} & \dots & y_{nn} \end{bmatrix}
\end{array}.
$$

Oznaczmy przez $x = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix}^T$ **wektor produkcji globalnej (całkowitej)**, gdzie x_j to całkowita produkcja j-tej gałęzi. Załóżmy, że całkowita produkcja każdej z gałęzi jest częściowo konsumowana przez pozostałe gałęzie, tzn:

$$\sum_{i=1}^{n} y_{ij} < x_j \tag{4}$$

dla $j = 1, \dots, n$. Zadajmy **macierz konsumpcji (współczynników kosztów)** $C = (c_{ij})_{nn}$ jako

$$(c_{ij}) \overset{\mathrm{dF}}{=} \left(\frac{y_{ij}}{x_j} \right). \tag{5}$$

Zatem jeśli sektory $S_1, S_2, \dots, S_n$ produkują $x_1, x_2, \dots, x_n$ jednostek, to jeśli dany jest **wektor produkcji** $x = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix}^T$, gdzie $x_i \geqslant 0$, to

$$Cx = \begin{bmatrix} c_{11}x_1 + \dots + c_{1n}x_n \\ \vdots \\ c_{n1}x_1 + \dots + c_{nn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{całkowita produkcja (w j.p.) produktu } S_1 \\ \text{przy wykorzystaniu produktów sektorów } S_1, \dots S_n \\ \vdots \\ \text{całkowita produkcja (w j.p.) produktu } S_n \\ \text{przy wykorzystaniu produktów sektorów } S_1, \dots S_n \end{bmatrix}$$

Z kolei każda suma elementów kolumny przedstawia częściowy koszt nakładów zużytych na wyprodukowanie ilości pewnego dobra wartej 1 j.p. Jeśli ta suma byłaby większa od jeden, to produkcja nie byłaby ekonomicznie uzasadniona. Oznacza to, że

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ij} < 1, \tag{6}$$

co na podstawie definicji c_{ij} jest równoważne nierówności (4). Otrzymaliśmy zatem ekonomiczne uzasadnienie założenia (4). O sektorze S_j, którego produkty nie są w całości konsumowane przez sektory $S_1, \dots, S_n$ (tzn. spełniony jest warunek (6)) będziemy mówili, że jest on **dochodowy**.

W modelu uwzględnić musimy również tzw. otwarty sektor. Jest on bezproduktywny, nie produkuje niczego co mogłoby zostać wykorzystane przez sektory $S_1, \dots, S_n$. Sektor ten jedynie potrzebuje dóbr (produktów) wytwarzanych przez sektory $S_1, \dots, S_n$.[3] Ze względu na nierówność w (4) wiemy, że nie cała produkcja jest konsumowana przez gospodarkę, pozostaje więc coś, co możemy przeznaczyć dla nowego sektora. Otrzymane nadwyżki umieszcza się w tzw. **wektorze zapotrzebowania zewnętrznego (produkcji końcowej, popytu końcowego)** $d = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & \dots & d_n \end{bmatrix}^T$. Mówi on ile jednostek (pieniężnych) otwarty sektor potrzebuje (otrzymuje) z sektorów $S_1, \dots, S_n$.

Interesuje nas czy możliwe jest aby ustalić poziom produkcji x tak aby zarówno produktywne jak i otwarte sektory osiągały optimum wykorzystując jednocześnie wszystkie produkty. Matematycznie problem sprowadza się do następującej zależności:

[3] Naturalne interpretacje sektoru otwartego to w kontekście gospodarki wewnętrznej – gopodarstwa domowe, w kontekście międzynarodowym – eksport, z punktu widzenia jednej (powiedzmy dużej) firmy, korporacji – produkty jakie ta firma chce sprzedać.

Model Leontiewa gospodarki otwartej

$$\underset{\text{całkowita produkcja}}{x} = \underset{\substack{\text{zapotrzebowanie}\\ \text{z sektora produkcyjnego}\\ \text{do wyprodukowania } x}}{Cx} + \underset{\substack{\text{zapotrzebowanie}\\ \text{z sektora otwartego}\\ \text{do wyprodukowania } x}}{d}$$

Możemy przekształcić to równanie do postaci

$$Lx = d, \tag{7}$$

gdzie $L = I - C$.

Macierz L nazywana jest **macierzą Leontiewa** lub **macierzą struktury technicznej**, a jej macierz odwrotna $M = L^{-1}$ (która istnieje dla gospodarki otwartej) **macierzą współczynników materiałochłonności** lub **macierzą współczynników dodatkowego zapotrzebowania**. Przy jej pomocy możemy wyznaczyć wektor produkcji globalnej (wektor, dla którego zapotrzebowania wewnętrzne i zewnętrzne są zaspokojone):

$$x = Md.$$

2.3 Przykład

2.3.1 Uwaga o tablicach przepływów

W praktyce dane dla pewnego okresu (np. roku) zbiera się w postaci tabeli, w której każdy wiersz odpowiada gałęzi gospodarki (niekoniecznie każda z pozycji w tabeli musi być znana):

Sektor	Produkcja globalna	Produkcja konsumowana przez $S_1, \dots S_n$	Produkcja końcowa
S_1	x_1	$y_{11}\ y_{12}\ \cdots\ y_{1n}$	d_1
S_2	x_2	$y_{21}\ y_{22}\ \cdots\ y_{2n}$	d_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots$	$\vdots$
S_n	x_n	$y_{n1}\ y_{n2}\ \cdots\ y_{nn}$	d_n

Przypomnijmy, że współczynniki c_{ij} obliczamy ze wzoru

$$c_{ij} = \frac{y_{ij}}{x_j}.$$

2.3.2 Przykład

Dana jest tablica przepływów międzygałęziowych

Sektor	Produkcja globalna	Przepływy	Produkcja końcowa
S_1	250	25 70 30	125
S_2	350	100 105 75	70
S_3	300	50 35 60	155

Na podstawie tablicy

a) utworzyć macierz konsumpcji

b) wyznaczyć wektor produkcji globalnej, jeśli wektor produkcji końcowej wynosi $\begin{bmatrix} 200 & 150 & 200 \end{bmatrix}^T$.

Rozwiązanie.

a) Mamy $c_{ij} = \frac{y_{ij}}{x_j}$, więc

$$C = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,1 \\ 0,4 & 0,3 & 0,25 \\ 0,2 & 0,1 & 0,2 \end{bmatrix}.$$

b) Mamy $x = Md$, gdzie $M = \begin{bmatrix} 1,37 & 0,44 & 0,31 \\ 0,95 & 1,8 & 0,68 \\ 0,46 & 0,33 & 1,41 \end{bmatrix}$, $d = \begin{bmatrix} 200 & 150 & 200 \end{bmatrix}^T$, więc

$$x = \begin{bmatrix} 1,37 & 0,44 & 0,31 \\ 0,95 & 1,8 & 0,68 \\ 0,46 & 0,33 & 1,41 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 200 \\ 150 \\ 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 401,8 \\ 595,6 \\ 424,9 \end{bmatrix}.$$

2.3.3 Zmiany wielkości produkcji i zapotrzebowania

Zauważmy, że jeśli znamy zapotrzebowanie na poszczególne produkty dla pewnego przyszłego okresu, to ważna będzie wiedza, jaka musi być minimalna produkcja poszczególnych sektorów aby zapewnić dostateczną wielkość produktów końcowych. Matematycznie możemy to sformalizować następująco:niech $d^0 = \begin{bmatrix} d_1, \ldots, d_n \end{bmatrix}^T$ będzie przyszłym zapotrzebowaniem, a $x^0 = \begin{bmatrix} x_1, \ldots, x_n \end{bmatrix}^T$ – wektorem (bieżącej) produkcji Przypuśćmy, że zapotrzebowanie zmienia się na $d = d^0 + c$, gdzie c jest wektorem zmiany zapotrzebowania, zaś wektor produkcji zmienia się na $x = x^0 + z$, gdzie z jest wektorem zmiany produkcji. Wtedy $(I - C)x = d$, czyli

$$(I - C)(x^0 + z) = d^0 + c,$$

$$(I - C)x^0 + (I - C)z = d^0 + c$$

i po redukcji mamy

$$(I - C)z = c,$$

zatem wyznaczanie wektora zmian odbywa się na tej samej zasadzie co wyznaczenie wektora produkcji.

3 Model Leontiewa z nieco szerszej perspektywy

3.1 Warunki poprawności modelu

We wcześniejszym podrozdziale rozpatrywaliśmy model Leontiewa gospodarki otwartej. Tym razem spojrzymy na ten model nieco szerzej, z nieco bardziej ogólnego punktu widzenia. Interesować nas będzie kiedy, mając daną macierz konsumpcji C model ma sens – jakie ograniczenia musimy nałożyć na macierz C? Przypomnijmy, że $L = I - C$ to macierz Leontiewa, d – wektor produktów końcowych (bądź wektor zapotrzebowania), zaś x to wektor produkcji. Powiedzmy, że znamy macierz konsumpcji oraz, co za tym idzie, macierz Leontiewa. Chcielibyśmy otrzymać $d = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & \ldots & d_n \end{bmatrix}^T$ jednostek produkcji (zapotrzebowania). W tym celu musimy wyznaczyć wektor x z równania

$$Lx = d.$$

Jeśli L jest odwracalna, to

$$x = L^{-1}d. \tag{8}$$

Odwracalność L nie jest jednak jedynym ograniczeniem, aby nasze rozważania miały ekonomiczny sens. Zapotrzebowanie d i produkcja x muszą być nieujemne. Musimy zatem odpowiedzieć na pytanie kiedy $L^{-1} = (I - C)^{-1}$ jest nieujemną macierzą. Mówiąc ogólnie, macierz konsumpcji C (a dokładniej suma wyrazów w każdej z jej kolumn) nie może być zbyt duża. Jeśli konsumpcja jest zbyt duża nic nie zostanie wyprodukowane. Kluczowa jest dominująca wartość własna, oznaczmy ją przez $\bar{\lambda}_C$, która musi być mniejsza od 1, ponieważ

a) jeśli $\bar{\lambda}_C > 1$, to $(I - C)^{-1}$ nie jest nieujemna,

b) jeśli $\bar{\lambda}_C = 1$, to $I - C$ nie jest odwracalna,

c) jeśli $\bar{\lambda}_C < 1$, to $(I - C)^{-1}$ istnieje i jest nieujemna.

W ostatnim przypadku, gdy $\bar{\lambda}_C < 1$, mówimy, że **gospodarka jest wydajna**.

Ciekawy ekonomicznie jest też przypadek, gdy $\bar{\lambda}_C = 1$. Odpowiada on tzw. modelowi gospodarki zamkniętej – w tym przypadku cała produkcja zostaje skonsumowana przez gałęzie gospodarki. Nic nie wychodzi poza układ, czyli $d = 0$, a równanie jakie otrzymujemy to

$$Cx = x$$

lub równoważnie

$$(I - C)x = 0.$$

Oczywiście macierz $L = I - C$ jest osobliwa. Ponadto macierz konsumpcji C jest macierzą Markowa.

3.2 Ceny w modelu Leontiewa gospodarki zamkniętej

Załóżmy, że myślimy o wartości każdej produkcji zamiast o liczbie jednostek produkowanych przez gałąź. Wektor x reprezentuje zatem ceny produktów. Załóżmy, że $u_0 = x$ jest wektorem cen. Wtedy Cu_0 podaje wartość każdego z produktów, czyli nowy wektor cen, który wykorzystujemy dalej (w kolejnym kroku) aby otrzymać kolejny wektor cen C^2u_0 itd. Otrzymujemy równanie różnicowe

$$u_k = C^k u_0.$$

Możemy pytać, czy układ osiąga stan równowagi, tzn. czy jest taka produkcja, że $Cu_0 = u_0$ oraz czy gospodarka będzie zmierzała do takiego stanu. Mamy do czynienia z macierzą Markowa dlatego też odpowiedź jest pozytywna: $\lambda = 1$ jest wartością własną macierzy konsumpcji C. Istnieje stan równowagi v_C będący wektorem własnym związanym z tą wartością własną. Ponadto powtarzając transakcje jesteśmy zazwyczaj w stanie zbliżyć się do tego stanu, co gwarantuje nam, dla macierzy dodatnich, twierdzenie Frobeniusa-Perrona.

3.3 Tempo wzrostu gospodarki*

Wartości własne mogą być również przydatne gdy chcemy ustalić maksymalne tempo rozwoju gospodarki. Zastosowanie to prześledzimy na prostym przykładzie, gdzie mamy do czynienia z konsumpcją np. stali, jedzenia i pracy. Rozpatrzmy macierz konsumpcji C:

$$C = \begin{bmatrix} 0,4 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0,1 & 0,8 \\ 0,5 & 0,7 & 0,1 \end{bmatrix},$$

gdzie pierwsza kolumna odpowiada za konsumpcję stali, druga jedzenia, trzecia – pracy. Jeśli produkcja jest na poziomie $u_1 = \begin{bmatrix} s_1 & f_1 & l_1 \end{bmatrix}^T$, to wymagane wkłady wynoszą

$$u_0 = Cu_1.$$

Jak widzimy mamy do czynienia z równaniem różnicowym z „czasem” idącym wstecz.[4] Jeśli wyrazy w macierzy konsumpcji C są małe (jak w tym przypadku), to produkty nie zostaną w całości skonsumowane przez produkcję. Implikować to będzie wzrost naszej gospodarki. Wzrost ten zależy od wartości własnych C^{-1}. Niestety ponownie trzeba pamiętać o tym aby wszystkie wyrazy macierzy C^{-1} były nieujemne (ilość stali, jedzenia, jednostek pracy nie mogą być ujemne). Słynny matematyk John Von Neumann (1903-1957) zapytał o maksymalne tempo t, z jakim może rozwijać się gospodarka (przy zachowaniu nieujemności wyników, tzn. $u_1 \geqslant tu_0 \geqslant 0$).

Oznacza to, że interesuje nas nierówność

$$u_1 \geqslant tCu_1.$$

Mamy tu podobny problem jak w twierdzeniu Frobeniusa-Perrona. Równość zachodzi, gdy $t = t_{\max}$, które równe jest wartości własnej związanej z dodatnim (którego wszystkie współrzędne są dodatnie) wektorem własnym macierzy C^{-1}. Oznacza to, że **maksymalne tempo przyrostu wynosi** $\frac{1}{\lambda_1}$, gdzie λ_1 jest dominującą wartością własną.

W powyższym przykładzie mamy

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad Cx = \begin{bmatrix} 0,4 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0,1 & 0,8 \\ 0,5 & 0,7 & 0,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9 \\ 4,5 \\ 4,5 \end{bmatrix} = \frac{9}{10}x,$$

zatem współczynnik rozwoju wynosi $\frac{10}{9}$. Gdy podział produkcji wynosi $1, 5, 5$, gospodarka rośnie najszybciej jak to możliwe: Maksymalne tempo przyrostu wynosi $\frac{1}{\lambda_1} = \frac{10}{9}$.

4 Metoda najmniejszych kwadratów – wersja algebraiczna

Opiszemy teraz metodę najmniejszych kwadratów w wersji algebraicznej, która jest szeroko wykorzystywana w ekonometrii. Inne podejście do metody najmniejszych kwadratów zostanie pokazane w II semestrze podczas kursu z analizy matematycznej.[5]

Niech y będzie liniową funkcją m zmiennych $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$ zadaną przez

$$y(x_1, \ldots, x_m) = c_1x_1 + \ldots c_mx_m,$$

gdzie $c_1, \ldots, c_m$ są nieznanymi stałymi rzeczywistymi. Załóżmy, że $c_1, \ldots, c_m$ są otrzymywane w wyniku n eksperymentów (pomiarów), w których mierzone są $x_1, \ldots, x_m$ oraz y. Akceptujemy to, że rozwiązanie może być obciążone błędem, ale chcielibyśmy go zminimalizować.

Załóżmy, że k-ty eksperyment (pomiar) daje

$$x_{k1}, \ldots, x_{km} \text{ oraz } y_k.$$

Otrzymujemy zatem układ równań liniowych na $c_1, \ldots, c_m$:

$$\begin{cases} x_{11}c_1 + x_{12}c_2 + \ldots + x_{1m}c_m = y_1, \\ \vdots \\ x_{n1}c_1 + x_{n2}c_2 + \ldots + x_{nm}c_m = y_n, \end{cases} \tag{9}$$

lub

$$Ac = y, \tag{10}$$

[4] to bardzo częste zdarzenie w przypadku problemów ekonomicznych.

[5] przygotowane na podstawie: *F. Aleskerov, H. Ersel, D. Piontkovski „Linear Algebra for Economists” Springer 2011*

gdzie $A = (x_{ij}) \in M(n,m)$ jest macierzą współczynników układu, $c = \begin{bmatrix} c_1 & \dots & c_m \end{bmatrix}$ jest wektorem niewiadomych, a $y = \begin{bmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{bmatrix}$.

Załóżmy, że $n > m$. Ponieważ x_i oraz y mierzone są z błędami, oczekiwanie otrzymania dokładnego rozwiązania (9) lub (10) nie ma sensu. Naszym celem jest zatem wyznaczenie stałych $c_1, \dots, c_m$, dla których lewe i prawe strony równań (9) są możliwie bliskie. Miarą bliskości będzie

$$d(c_1, \dots, c_m) = \sum_{k=1}^{m} (x_{k1}c_1 + \ldots + x_{km}c_m - y_k)^2 \tag{11}$$

dla $k = 1, \dots, n$. Stąd problem jaki należy rozwiązać to minimalizacja $d(c_1, \dots, c_m)$.

Przeformułujmy nieco problem. Zauważmy, że suma $x_{k1}c_1 + \ldots + x_{km}c_m$ jest k-tym komponentem wektora Ac w $\mathbb{R}^n$. Oznacza to, że $d(c_1, \dots, c_m) = |Ac - y|^2$, czyli jest kwadratem odległości między wektorami Ac oraz y.

Rozpatrzmy kolumny macierzy A, tzn. $k_i(A) = \begin{bmatrix} x_{1i} & x_{2i} & \dots & x_{ni} \end{bmatrix}^T$. Zatem minimalizacja (11) jest równoważna znalezieniu $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$, dla których odległość między y a

$$y_0 = Ac = c_1k_1(A) + \ldots + c_mk_m(A)$$

jest najmniejsza. Niech U będzie podprzestrzenią przzestrzeni $\mathbb{R}^n$ rozpiętą na wektorach $k_1(A), \dots, k_m(A)$. Zatem problem jest równoważny znalezieniu rzutowania y_0 na U.

Załóżmy, że $k_1(A), \dots, k_m(A)$ są liniowo niezależne, tzn. macierz A jest pełnego rzędu. Skorzystamy z następującego twierdzenia:

Twierdzenie 3. *Niech U będzie m-wymiarową podprzestrzenią $\mathbb{R}^n$ wyposażoną w ortonormalną bazę $f^1, \dots, f^m$ gdzie $m < n$. Wtedy prostopadłe rzutowanie wektora $x \in \mathbb{R}^n \setminus U$ na U dane jest wzorem*

$$y = c_1f_1 + \ldots + c_mf_m,$$

gdzie $c_i = \langle x, f_i \rangle$ dla dowolnych $i = 1, \dots, m$.

Zatem

$$\langle k_1(A), k_i(A) \rangle c_1 + \langle k_2(A), k_i(A) \rangle c_2 + \ldots + \langle k_m(A), k_i(A) \rangle c_m = \langle y, k_i(A) \rangle \tag{12}$$

dla $i = 1, \dots, m$, gdzie

$$\langle y, k_i(A) \rangle = \sum_{j=1}^{n} y_jx_ji$$

oraz

$$\langle k_j(A), k_i(A) \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_{kj}x_{ki}.$$

Zatem problem znalezienia przybliżonego rozwiązania równania (9) sprowadziliśmy do problemu znalezienia dokładnego rozwiązania równania (12).

Przykład 1. *Rozpatrzmy problem przybliżenia za pomocą metody najmniejszych kwadratów prostej na płaszczyźnie. Mając dane pomiary $X = (x_1, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, \dots, y_n)$ odpowiednio dla zmiennych x i y znajdź nachylenie c prostej p równaniu $y = cx$.*

Wiemy, że

$$\begin{cases} y_1 = cx_1, \\ \vdots \\ y_n = cx_n. \end{cases}$$

Używając (12) otrzymujemy

$$c = \frac{\langle X, Y \rangle}{\langle X, X \rangle} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_iy_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$