1 Forma kwadratowa – definicja

Kolejnym istotnym dla nas pojęciem jest tzw. forma kwadratowa. Odwzorowań tych używa się często np. przy modelowaniu kosztów produkcji powiązanych ze sobą towarów, bądź dochodów pochodzących z ich sprzedaży. Formy kwadratowe odgrywają też kluczową rolę przy poszukiwaniu ekstremów lokalnych funkcji wielu zmiennych o czym dokładniej dowiedzą się Państwo podczas kursu analizy w następnym semestrze.

Definicja 1. **Formą kwadratową** *nazywamy dowolny wielomian n zmiennych $f\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, którego wszystkie niezerowe składniki są stopnia drugiego, tzn. f jest postaci*

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j,$$

dla $x = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix}^T$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $a_{ij} = a_{ji}$ dla dowolnych $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Przykłady: $f(x_1, x_2) = x_1^2+x_2^2$, $f(x_1, x_2) = x_1^2+4x_1x_2+x_2^2$, $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2+3x_2^2-4x_3^2+6x_1x_2-2x_1x_3$, $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1^2 - x_2^2 + 7x_1x_5 - 3x_3^2 + 4x_4^2 - 11x_3x_4 + x_5^2$

Twierdzenie 1. *Odwzorowanie $f\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ jest formą kwadratową wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje symetryczna macierz A taka, że*

$$f(x) = x^T Ax, \quad \textit{gdzie } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Macierz A jest jednoznacznie wyznaczona przez formę kwadratową i nazywana jest **macierzą symetryczną związaną z formą kwadratową** f.

2 Określoność formy kwadratowej

Dla dowolnej formy kwadratowej mamy $f(0) = 0$. Interesuje nas, czy dana forma przyjmuje tylko nieujemne bądź tylko niedodatnie wartości, a $x = 0$ jest punktem, w którym f osiąga minimum lub maksimum (globalne). Wprowadzamy następującą nomenklaturę

Definicja 2. *Forma kwadratowa $f(x) = x^T Ax$ (równoważnie: jej (symetryczna) macierz A) jest*

- **dodatnio określona**, *jeśli $f(x) > 0$ dla $x \neq 0$,*
- **dodatnio półokreślona**, *jeśli $f(x) \geqslant 0$ dla $x \neq 0$ i istnieje $x_0 \neq 0$, takie że $f(x_0) = 0$,*
- **ujemnie określona**, *jeśli $f(x) < 0$ dla $x \neq 0$,*
- **ujemnie półokreślona**, *jeśli $f(x) \leqslant 0$ dla $x \neq 0$ i istnieje $x_0 \neq 0$, takie że $f(x_0) = 0$,*
- **nieokreślona**, *jeśli f przyjmuje wartości dodatnie i ujemne.*

Łatwo zauważyć, że np. forma $f(x) = x_1^2 + x_2^2$ jest dodatnio określona, ujemnie określona $f(x) = -x_1^2 - x_2^2$, natomiast forma $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ jest dodatnio półokreślona. Zazwyczaj jednak badanie określoności na podstawie definicji jest dość trudne. Oczywiście forma kwadratowa jest jednoznacznie zadana przez macierz symetryczną z nią związaną. Oznacza to, że określoność formy można badać analizując własności jej macierzy.

Twierdzenie 2 (Kryterium wartości własnych)**.** *Niech $f(x) = x^T Ax$ będzie formą kwadratową, zaś $\lambda_1, \dots \lambda_n$ jej wartościami własnymi. Wtedy*

- *f jest dodatnio określona* $\iff \forall_{i\in\{1,\dots,n\}}\ \lambda_i > 0$,
- *f jest dodatnio półokreślona* $\iff \forall_{i\in\{1,\dots,n\}}\ \lambda_i \geqslant 0$ *oraz* $\exists_{j\in\{1,\dots,n\}}\ \lambda_j = 0$,
- *f jest ujemnie określona* $\iff \forall_{i\in\{1,\dots,n\}}\ \lambda_i < 0$,
- *f jest ujemnie półokreślona* $\iff \forall_{i\in\{1,\dots,n\}}\ \lambda_i \leqslant 0$ *oraz* $\exists_{j\in\{1,\dots,n\}}\ \lambda_j = 0$,
- *f jest nieokreślona* $\iff \exists_{i,j\in\{1,\dots,n\}}\ \lambda_i > 0, \lambda_j < 0$.

Określoność formy możemy też badać obliczając tzw. minory główne macierzy:

Definicja 3. Wiodącym minorem głównym *macierzy $A = (a_{ij}) \in M(n,n)$ stopnia k ($k < n$) nazywamy wyznacznik macierzy postałej z k pierwszych wierszy i k pierwszych kolumn macierzy A (powstałej poprzez wykreślenie wszystkich wierszy i kolumn o numerach większych od k), tzn.*

$$M_k(A) = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{bmatrix}.$$

Mając to pojęcie możemy sformułować kolejne kryterium określoności:

Twierdzenie 3 (Kryterium Sylvestera)**.** *Macierz symetryczna $A \in M(n,n)$ o współczynnikach rzeczywistych jest*

- *dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy jej wiodące minory główne są dodatnie, tj. $M_k(A) > 0$ dla $k \in \{1,\dots,n\}$.*
- *ujemnie określona wtedy i tylko wtedy, gdy $M_k(A) > 0$ dla $k \in \{1,\dots,n\} \cap 2\mathbb{N}$. oraz $M_k(A) < 0$ dla $k \in \{1,\dots,n\} \cap (2\mathbb{N}-1)$.*

Uwaga 1. *Kryterium Sylvestera NIE zachodzi dla form półokreślonych, tzn. np. nie jest prawdą, że jeśli $M_k(A) \geqslant 0$ dla $k = 1,2,\dots,n$ to A ma nieujemne wartości własne (a forma jest dodatnio półokreślona).*

3 Geometryczne znaczenie określoności*

Określoność formy kwadratowej ma również interpretację geometryczną:

Twierdzenie 4. *Niech $f(x) = x^T Ax$ będzie formą kwadratową. Wtedy*

- *f jest wypukła $\Leftrightarrow$ A jest dodatnio półokreślona,*
- *f jest wklęsła $\Leftrightarrow$ A jest ujemnie półokreślona,*
- *f jest ściśle wypukła $\Leftrightarrow$ A jest dodatnio określona,*
- *f jest ściśle wklęsła $\Leftrightarrow$ A jest ujemnie określona.*