W ramach całego poniższego materiału zakładamy, że $A \in M(n,n)$, $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ są jej wartościami własnymi, a przez $v^1,\dots,v^n$ oznaczamy odpowiadające im wektory własne.

1 Diagonalizacja – przypadek ogólny

Z poprzedniego wykładu wiemy, że jeśli $\lambda_i \neq \lambda_j$ dla dowolnych $i,j \in \{1,\dots,n\}$, to zbiór $\{v^1,\dots,v^n\}$ jest liniowo niezależny. Innymi słowy, jeśli A posiada n różnych wartości własnych, to $P = \begin{bmatrix} v^1 & \dots & v^n \end{bmatrix} \in M(n,n)$ jest macierzą nieosobliwą.

Rozpatrzmy macierz AP. Wtedy

$$AP = A \cdot \begin{bmatrix} v^1 & \dots & v^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 v^1 & \dots & \lambda_n v^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v^1 & \dots & v^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = PD_\Lambda,$$

gdzie

$$D_\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Otrzymujemy więc równanie

$$AP = PD_\Lambda,$$

z którego, ponieważ $\operatorname{rz} P = n$, możemy wyznaczyć

$$A = PD_\Lambda P^{-1} \tag{1}$$

lub

$$D_\Lambda = P^{-1}AP. \tag{2}$$

Procedurę, która doprowadziła nas do (1) nazywamy **diagonalizacją** lub **dekompozycją** macierzy A.

Warto zauważyć, że postać (1) pozwala nam sprawnie wyznaczać duże potęgi A. Pamiętając, że $P \cdot P^{-1} = I$ otrzymujemy

$$A^k = (PD_\Lambda P^{-1}) \cdot (PD_\Lambda P^{-1}) \cdots (PD_\Lambda P^{-1}) = PD_\Lambda^k P^{-1}, \tag{3}$$

dla $k \in \mathbb{N}$ gdzie, ponieważ D_Λ jest macierzą diagonalną,

$$D_\Lambda^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{bmatrix}.$$

Definicja 1. *Macierz $A \in M(n,n)$ jest* **diagonalizowalna***, jeśli istnieją diagonalna macierz $D_\Lambda \in M(n,n)$ oraz nieosobliwa macierz $P \in M(n,n)$ takie, że $A = PD_\Lambda P^{-1}$.*

Powstaje pytanie czy każdą macierz możemy sprowadzić do postaci (1). Okazuje się, że niestety nie:

Twierdzenie 1. *Niech $A \in M(n,n)$*

1. *A jest diagonalizowalna wtedy i tylko wtedy, gdy posiada n liniowo niezależnych wektorów własnych*
2. *Jeśli A posiada n różnych wartości własnych, to jest diagonalizowalna*
3. *Jeśli A jest symetryczna, to A jest diagonalizowalna.*

Procedura diagonalizacji

- Wyznacz wartości własne macierzy A i stwórz macierz D_Λ;
- Wyznacz wektory własne związane z wartościami własnymi;
- Sprawdź czy istnieje n liniowo niezależnych wektorów własnych;
- Jeśli poprzedni punkt zachodzi (np. jeśli macierz A ma n różnych wartości własnych, to tak jest i wystarczy wybrać po jednym wektorze własnych sprzężonym z daną wartością własną), to wybierz n liniowo niezależnych wektorów własnych i stwórz z nich macierz P;
- Wyznacz P^{-1};
- Podstaw macierze do wzoru (1)

Na wykładzie zdiagonalizowaliśmy (niesymetryczną) macierz z $M(2,2)$. Poniżej omówimy nieco bardziej skomplikowany przykład diagonalizacji macierzy $A \in M(3,3)$, która posiada zespolone wartości (a co za tym idzie wektory) własne.

Przykład 1. Zdiagonalizuj macierz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Krok 1. Wyznaczamy wartości własne macierzy A i macierz D_Λ.

Mamy

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}, \quad \det(A - \lambda I) = (2-\lambda)(1-\lambda)^2 + (2-\lambda).$$

Z równania charakterystycznego macierzy otrzymujemy jej wartości własne $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1 + i$ i $\lambda_3 = 1 - i$ oraz

$$D_\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{bmatrix}.$$

Krok 2. Wykorzystując metodę Gaussa-Jordana wyznaczamy wektory własne związane z wartościami własnymi λ_1, λ_2 i λ_3.

Z $\lambda_1 = 2$ związane są wektory postaci

$$v^1 = c \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c \in \mathbb{R} \backslash \{0\}.$$

Z wartością własną $\lambda_2 = 1 + i$ związane są wektory

$$v^2 = c \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Natomiast z $\lambda_3 = 1 - i$ związane są wektory

$$v^3 = c \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Krok 3. Ponieważ wartości własne macierzy są (parami) różne, zatem macierz A jest diagonalizowalna.

Krok 4. Ponadto istnieją trzy liniowo niezależne wektory własne macierzy (związane z różnymi wartościami własnymi). Wybieramy reprezentantów wektorów v^1, v^2 i v^3 np. poprzez wybranie skalara $c = 1$, a następnie zadajemy

$$P = \begin{bmatrix} v^1 & v^2 & v^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & -i \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Krok 5. Wyznaczamy (np. przy pomocy metody operacji elementarnych) macierz odwrotną do P:[1]

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}i & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Krok 6. Ostatecznie otrzymujemy

$$A = P \cdot D_\Lambda \cdot P^{-1}$$

czyli

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & -i \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}i & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

2 Diagonalizacja macierzy symetrycznych

Ze względu na Twierdzenie 1.1 i 1.3 macierz symetryczna zawsze posiada n liniowo niezależnych wektorów własnych. Dla takich macierzy można usprawnić naszą procedurę. Potrzebować do tego będziemy pojęcia macierzy ortogonalnej.

Definicja 2. *Mówimy, że macierz $A \in M(n,n)$ jest* **ortogonalna**, *jeśli*

- *każda kolumna jest prostopadła do pozostałych*
- *każda kolumna macierzy A jest długości 1, tzn. $|| \begin{bmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} \end{bmatrix}^T || = 1$ dla $i = 1, \dots, n$.*

Macierze ortogonalne mają istotną własność: $P^{-1} = P^T$.

Okazuje się, że w przypadku macierzy symetrycznych możemy tak dobrać wektory własne, aby macierz P była ortogonalna. Wynika to z faktu, że

Twierdzenie 2. *Wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym macierzy symetrycznej są ortogonalne.*

[1]Pamiętamy z kroku 4, że macierz P jest pełnego rzędu, zatem P^{-1} istnieje.

Stąd wybierając do macierzy P unormowane do jedynki wektory własne, tzn. takie, że $||v^1|| = \ldots = ||v^n|| = 1$ otrzymana macierz P. Pozwala nam to zmodyfikować wzór (1) dla macierzy symetrycznych:

$$A = PD_\Lambda P^T \tag{4}$$

i nieco uprościć procedurę (nie trzeba wyznaczać macierzy odwrotnej co dla dużych macierzy jest bardzo żmudne):

Procedura diagonalizacji macierzy symetrycznej

- Wyznacz wartości własne macierzy A i stwórz macierz D_Λ;
- Wyznacz wektory własne związane z wartościami własnymi;
- Wybierz n liniowo niezależnych wektorów własnych długości jeden (takie wektory muszą istnieć ze względu na Twierdzenie 1.3.) i stwórz z nich macierz P;
- Podstaw macierze do wzoru (4)