1 Wartości i wektory własne macierzy — definicja i algorytm wyznaczania

Definicja 1. *Niech A będzie macierzą kwadratową $n \times n$. Mówimy, że $\lambda \in \mathbb{C}$ jest* **wartością własną** *A, jeżeli istnieją takie $v \neq 0$, $v \in \mathbb{C}^n$ (które nazywamy* **wektorami własnymi odpowiadającymi wartości własnej** *λ), że*

$$Av = \lambda v. \tag{1}$$

Zauważmy, że równanie (1) można przedstawić jako

$$Av = \lambda v \quad \Leftrightarrow \quad Av - \lambda v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{(A - \lambda I)v = 0}.$$

Ten układ posiada nietrywialne rozwiązanie $v \neq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\det(A - \lambda I) = 0. \tag{2}$$

Definicja 2. *Równanie (2) nazywamy* **równaniem charakterystycznym macierzy** *A, zaś*

$$W(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

wielomianem charakterystycznym *tej macierzy.*

Uwaga 1. *Wartości własne macierzy A są rozwiązaniami jej równania charakterystycznego.*

Procedura wyznaczania wartości i wektorów własnych macierzy

- Wyznacz wartości własne macierzy A;
- Dla każdej wartości własnej λ rozwiąż równanie $(A - \lambda I)v = 0$.

Przykład 1. Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. Chcemy wyznaczyć wartości i wektory własne tej macierzy. Równanie $Av = \lambda v$ daje

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix},$$

co równoważnie można zapisać jako

$$\begin{bmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 0 & 3 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0. \tag{3}$$

Wielomian charakterystyczny ma postać

$$W(\lambda) = (1 - \lambda)(3 - \lambda),$$

a jego pierwiastkami są $\lambda_1 = 1$ oraz $\lambda_2 = 3$. Liczby λ_1, λ_2 są wartościami własnymi macierzy A. Z każdą z nich związanych jest nieskończenie wiele (niezerowych) wektorów własnych v^i (czyli takich, które spełniają równanie $Av^i = \lambda_i v^i$, $v^i \neq 0$). Dla $\lambda_1 = 1$ równanie (3) sprowadza się do zależności

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0.$$

Korzystając z metody Gaussa-Jordana otrzymujemy, że $v^1 = c\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}^T$, gdzie $c \neq 0$. Postępując podobnie dla $\lambda_2 = 3$ wyprowadzamy związane z nią wektory własne $v^2 = c\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}^T$, $c \neq 0$. Ostatecznie wartości i związane z nimi wektory własne mają postać

$$\lambda_1 = 1,\ v^1 = c\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\ c \neq 0$$

oraz

$$\lambda_2 = 3,\ v^1 = c\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\ c \neq 0.$$

Przykład 2. Niech A będzie macierzą diagonalną

$$A = \begin{bmatrix}a_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & a_n\end{bmatrix}.$$

Wtedy dla dowolnego $i \in \{1, \ldots, n\}$ liczba a_i jest wartością własną macierzy A, zaś związane z nim wektory własne będą postaci ce^i, gdzie $c \neq 0$.

Warto dodać, że w każdym z powyższych przykładów możemy stworzyć z wektorów własnych macierzy bazę przestrzeni wektorowej (odpowiednio płaszczyzny w Przykładzie 1 i $\mathbb{R}^n$ w Przykładzie 2) nie jest to przypadek (patrz Twierdzenie 4.3).

2 Kluczowe twierdzenia związane z wartościami i wektorami własnymi

Poniżej podajemy przegląd podstawowych twierdzeń związanych z wartościami i wektorami własnymi macierzy.

Twierdzenie 1 (Twierdzenie Cayley'a-Hamiltona)**.** *Macierz $A \in M(n, n)$ spełnia swoje równanie charakterystyczne.*

Twierdzenie Cayley'a-Hamiltona daje kolejną możliwość wyznaczenia macierzy odwrotnej do macierzy nieosobliwej — wystarczy wyznaczyć równanie charakterystyczne macierzy A, stworzyć z niego równanie macierzowe, następnie pomnożyć otrzymane równanie przez macierz odwrotną A^{-1} i rozwiązać równanie ze względu na A^{-1}.

Kolejne twierdzenia posłużą nam do sprawniejszego wyznaczania wartości własnych macierzy oraz pozwolą połączyć to pojęcie z wielkościami poznanymi na wcześniejszych wykładach.

Twierdzenie 2. *Niech $A \in M(n, n)$ oraz $\lambda \in \mathbb{C}$ będzie wartością własną tej macierzy. Wtedy*

1. *$\alpha\lambda$ jest wartością własną macierzy αA, $\alpha \in \mathbb{R}$,*
2. *λ^s jest wartością własną macierzy A^s, $s \geqslant 0$,*
3. *jeśli $w(v)$ jest wielomianem zmiennej v, to $w(\lambda)$ jest wartością własną macierzy $w(A)$,*
4. *jeśli A jest nieosobliwa, to λ^{-1} jest wartością własną macierzy A^{-1},*
5. *λ jest wartością własną macierzy A^T.*
6. *A jest nieodwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy $\lambda = 0$ jest wartością własną macierzy A.*

Twierdzenie 3. *Niech $A \in M(n, n)$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ jej wartościami własnymi. Wtedy*

1. $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = tr\,A$,

2. $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det A$.

Kluczowym dla dalszej części wykładu będzie następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4. *Niech $A \in M(n,n)$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$ jej wartościami własnymi, a v^i wektorami własnymi odpowiadającymi wartości własnej λ_i dla $i = 1, \ldots, n$. Wtedy*

1. *jeśli $\lambda_i \neq \lambda_j$, to v^i i v^j są liniowo niezależne,*
2. *jeśli A posiada n różnych wartości własnych, to zbiór $\{v^1, \ldots, v^n\}$ jest liniowo niezależny.*
3. *jeśli A posiada n różnych rzeczywistych wartości własnych, to zbiór $\{v^1, \ldots, v^n\}$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}^n$.*

Definicja 3. *Macierz $A = (a_{ij}) \in M(n,n)$ nazywamy symetryczną, jeśli $a_{ij} = a_{ji}$ dla $i,j \in \{1, \ldots, n\}$. Innymi słowy $A^T = A$.*

Macierze symetryczne mają bardzo ważną własność:

Twierdzenie 5. *Macierz symetryczna posiada tylko rzeczywiste wartości własne.*

3 Zastosowania w ekonomii (część 1)

3.1 Przykład 1 — równowaga na rynku

Rozpatrzmy gałąź gospodarki złożoną z trzech firm, które dzielą rynek pewnego dobra. Oznaczmy przez s wektor udziałów firm w rynku w danym roku (jego i-ta współrzędna opisuje udział w rynku i-tej firmy). Załóżmy, że macierz przejścia dla tej ekonomii dana jest przez macierz $P = (p_{ij})$, gdzie p_{ij} oznacza odsetek klientów firmy i, którzy przechodzą (zostają) do firmy j w kolejnym roku. Niech

$$P = \begin{bmatrix} 0,85 & 0,2 & 0,1 \\ 0,05 & 0,55 & 0,05 \\ 0,1 & 0,35 & 0,85 \end{bmatrix}.$$

Chcemy ustalić czy istnieje taki wektor v odzwierciedlający aktualny podział rynku, dla którego w kolejnym roku podział pozostanie bez zmian, tzn. $Pv = v$. Oznacza to, że $\lambda = 1$ jest wartością własną macierzy P, zaś v związanym z nią wektorem własnym. Można sprawdzić, że wektor

$$v = \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0,1 \\ 0,5 \end{bmatrix}$$

jest rozwiązaniem tego problemu, tzn. jest jedynym nieujemnym (tzn. wszystkie współrzędne tego wektora są nieujemne), wektorem własnym macierzy P, którego współrzędne sumują się do jedynki.

3.2 Przykład 2 — wzrost i konsumpcja

Rozpatrzmy gospodarkę złożoną z n sektorów, które produkują n dóbr składających się na wektor produkcji $\mathbf{x}$. Wszystkie dobra są zarówno używane jako wkład w produkcję jak i konsumowane przez pracowników. Zapotrzebowania wkładów w produkcję towaru zadane są przez tzw. macierz współczynników input/output $A \in M(n,n)$, natomiast zapotrzebowanie na pracę przez wierszowy wektor[1] $\mathbf{a}$. Zakładamy, że koszyk konsumpcji pracowników dany jest przez wektor kolumnowy $\mathbf{c}$.[2] System produkcji może być zadany następująco:

$$\mathbf{x} = A\mathbf{x} + \mathbf{cax}.$$

Taka gospodarka zużywa całą produkcję na bieżącą produkcję i konsumpcję jest zatem niezdolna do rozwoju. Wprowadźmy do modelu wzrost. Dla uproszczenia załóżmy, że decydenci mają na celu rozwój wszystkich sektorów w tym samym tempie na tzw. ścieżce zrównoważonego wzrostu. Stąd dodatkowa ilość towaru, niezbędna dla osiągnięcia tego wzrostu dana jest przez

$$\mathbf{s} = g(A\mathbf{x} + \mathbf{cax}), \tag{4}$$

gdzie $g > 0$ jest *zrównoważoną stopą wzrostu* gospodarki. Uwzględniając (4) w równaniu modelu otrzymujemy, że system produkcji zadany jest przez równanie

$$\mathbf{x} = A\mathbf{x} + \mathbf{cax} + g(A\mathbf{x} + \mathbf{cax}), \tag{5}$$

w którym pierwsza składowa odpowiada za wymagania (wejściowe) bieżącej konsumpcji zaś druga zadaje wymagania dla wzrostu. Zdefiniujmy

$$B = A + \mathbf{ca}.$$

Wtedy równanie modelu można zapisać jako

$$\mathbf{x} = (1+g)B\mathbf{x}. \tag{6}$$

Przypuśćmy, że decydenci chcą poznać maksymalną realną (możliwą do uzyskania) stopę wzrostu tej gospodarki, biorąc pod uwagę technologię $(A, \mathbf{a})$ i egzogennie zadany koszyk konsumpcji pracowników $\mathbf{c}$.

Zauważmy, że (6) może być zapisane w postaci

$$(B - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}, \tag{7}$$

gdzie

$$\lambda = \frac{1}{1+g}.$$

Z równania (7) wynika, że poszukiwaną przez nas odpowiedź można uzyskać poprzez wyznaczenie wartości własnych macierzy B i wybranie takiej, która daje największy wzrost. Oczywiście system produkcji będzie realny (wydajny) jeśli jest w stanie się utrzymać, tzn. $g > 0$, a związany z nim wektor własny jest nieujemny.

3.2.1 Przykład numeryczny

Załóżmy, że technologia gospodarki dana jest przez macierze

$$A = \begin{bmatrix} 0,12 & 0,17 & 0,12 \\ 0,14 & 0,11 & 0,14 \\ 0,11 & 0,13 & 0,11 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0,36 & 0,37 & 0,4 \end{bmatrix},$$

[1]ang. *labor/output coefficients row vector.*

[2]Można to interpretować jako koszyk płac, który odzwierciedla płacę minimalną, określoną przez warunki społeczne i historyczne danego społeczeństwa.

a wektor konsumpcji jest postaci

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0,6 \\ 0,45 \\ 0,45 \end{bmatrix}.$$

Uzupełniona macierz współczynników wkładów dla tego problemu ma postać

$$B = A + \mathbf{ca} = \begin{bmatrix} 0,336 & 0,392 & 0,36 \\ 0,253 & 0,277 & 0,32 \\ 0,272 & 0,297 & 0,29 \end{bmatrix}.$$

Wartości własne tej macierzy to

$$\lambda_1 = 0,9458,\ \lambda_2 = -0,0003,\ \lambda_3 = -0,0425.$$

Tylko λ_1 jest dodatnie. Dlatego też pozostałe wartości własne nie mają żadnego ekonomicznego znaczenia. Wektory własne związane z λ_1 to $c\begin{bmatrix} 0,6574 & 0,5455 & 0,5197 \end{bmatrix}^T$, $c \neq 0$. Na przykład dla $c = 1$ wszystkie współrzędne wektora własnego są dodatnie, zatem system produkcji ma sens. Maksymalna realna stopa wzrostu dla tej gospodarki to

$$g = \frac{1 - \lambda_1}{\lambda_1} = 5,7.$$

Ćwiczenie. Czy ta gospodarka dopuszcza 10-procentowy wzrost konsumpcji każdego z dóbr?[3]

[3] *Wskazówka*: Zmień wartości w wektorze $\mathbf{c}$ o 10% i zbadaj czy istnieje dodatnia stopu wzrostu g.