1 Rząd macierzy

Rozpatrzmy równanie jednorodne $Ax = 0$, gdzie $A \in M(n,k)$. Wiemy, że posiada ono rozwiązanie. Jednakże wymiar macierzy A, a tym samym liczba równań w odpowiadającym jej układzie równań liniowych nie dają nam pełnego obrazu co do prawdziwej wielkości tego układu. Rozwiązując układy równań przy pomocy metody Gaussa-Jordana spotkaliśmy się z wieloma sytuacjami gdy okazywało się, że jeden z wierszy macierzy (jedno z równań) bądź jedna z kolumn (jedna z niewiadomych) była zależna od pozostałych. Wielkością, która odsłania (rzeczywisty) wymiar jest rząd macierzy.

Definicja 1. Niech E_A oznacza macierz schodkową zredukowaną uzyskaną z macierzy A za pomocą operacji elementarnych. Wtedy **rzędem macierzy** A nazywamy liczbę niezerowych współczynników wiodących tej macierzy. Zatem

$$\begin{aligned} \operatorname{rz} A &= \text{liczba niezerowych „piwotów” macierzy } E_A \\ &= \text{liczba niezerowych wierszy macierzy } E_A \end{aligned}$$

Oczywiście dla $A \in M(n,k)$ mamy $\operatorname{rz} A \leqslant \min\{n,k\}$, oraz $\operatorname{rz} A^T = \operatorname{rz} A$. Ponadto każda macierz $A \in M(n,k)$, dla której $\operatorname{rz} A = k$ nazywać będziemy macierzą **pełnego rzędu**.

Wprowadzona definicja rzędu ma podstawową zaletę: podaje efektywną metodę wyznaczania rzędu macierzy, która w dodatku łatwo może być użyta w obliczeniach komputerowych — wystarczy przekształcić macierz A do E_A i podać ile niezerowych wierszy występuje w E_A. Nie przekazuje ona jednak intuicji, która stoi za tym pojęciem. A intuicja ta jest bardzo prosta: *Rząd macierzy to liczba autentycznie niezależnych wierszy (równoważnie: kolumn) w macierzy A.* Potrzebujemy formalnej matematycznej definicji. W tym celu wprowadzimy pojęcie liniowej niezależności wektorów. Ponadto zadamy równocześnie pojęcia podprzestrzeni, bazy i wymiaru, które pozwolą podać w szerszym kontekście zależności i zastosowania rzędu macierzy.

2 Liniowa niezależność

Wprowadźmy pojęcie liniowej niezależności. Dla danego zbioru wektorów $v^1, \ldots, v^k$ rozpatrujemy ich kombinacje liniowe $\alpha_1 v^1 + \ldots + \alpha_k v^k$. Trywialna kombinacja z wszystkimi wagami $\alpha_i = 0$ produkuje oczywiście wektor zerowy: $0v^1 + \ldots 0v^k = 0$. Nasuwa się pytanie: czy jest to jedyny sposób przedstawienia za pomocą wektorów $v^1, \ldots, v^k$ wektora zerowego. Jeśli tak, to mówimy, że wektory te są liniowo niezależne. Jeśli jakakolwiek nietrywialna kombinacja tych wektorów daje zero, to mówimy, że są one liniowo zależne.

Definicja 2. Niech $v^1, \ldots, v^k \in \mathbb{R}^n$. Mówimy, że wektory $v^1, \ldots, v^k$ są **liniowo zależne**, gdy jeden z nich jest kombinacją liniową pozostałych, tzn. istnieje $i \in \{1, \ldots, k\}$ oraz istnieją $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ takie, że

$$v^i = \sum_{l \neq i} \alpha_l v^l.$$

Wektory są **liniowo niezależne**, jeżeli nie są liniowo zależne.

Liniowa zależność jest łatwa do zwizualizowania w przestrzeni trójwymiarowej. Rozpatrzmy wektory zaczepione w początku układu współrzędnych. Wtedy dwa wektory są liniowo zależne jeśli leżą na tej samej prostej. Trzy wektory są liniowo zależne jeśli leżą w tej samej płaszczyźnie. Natomiast cztery wektory zawsze będą liniowo zależne w $\mathbb{R}^3$ (jeden z nich można zawsze zapisać za pomocą pozostałych trzech).

Liniowa niezależność pozwala podać kolejną równoważną definicję rzędu macierzy. Niech $A \in M(n,k)$ i niech $A = \begin{bmatrix} v_A^1 & \cdots & v_A^k \end{bmatrix}$, czyli wektor v_A^i jest i-tą kolumną macierzy A. Wtedy

$$\operatorname{rz} A = \text{ liczba liniowo niezależnych kolumn macierzy } A$$

oraz równoważnie

$$\operatorname{rz} A = \text{ liczba liniowo niezależnych wierszy macierzy } A.$$

Jak badać liniową niezależność? Pierwszą odpowiedź daje poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 1. Następujące warunki są równoważne

1. wektory $v^1, \ldots, v^k$ są liniowo niezależne;
2. $\forall_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k \in \mathbb{R}}\colon \quad \alpha_1 v^1 + \ldots \alpha_k v^k = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0.$
3. $\operatorname{rz}\begin{bmatrix} v^1 & \cdots & v^k \end{bmatrix} = k.$

Przykład 1. Wektor zerowy jest liniowo zależny.

Przykład 2. Kolumny macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ są liniowo zależne.

Przykład 3. Kolumny macierzy $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ są liniowo niezależne.

Przykład 4. Kolumny macierzy $I \in M(n, n)$ są liniowo niezależne.

Przykład 5. Kolumny macierzy $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ są liniowo zależne.

Jeden z przypadków ma szczególne znaczenie. Weźmy k wektorów z $\mathbb{R}^n$. Stworzona z nich macierz A jest macierzą $n \times k$. Przypuśćmy, że $k > n$. Wtedy w macierzy A jest zbyt wiele kolumn aby były one niezależne — nie może być k „piwotów”, ponieważ nie ma wystarczająco wielu wierszy. Oznacza to, że rząd tej macierzy musi być mniejszy niż k. Otrzymujemy zatem ogólną własność:

Uwaga 1. Jeśli $k > n$, to zbiór k wektorów z $\mathbb{R}^n$ musi być liniowo zależny.

3 Podprzestrzeń rozpięta na wektorach*

Definicja 3. Podprzestrzenią przestrzeni wektorowej $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$ nazywamy jej dowolny niepusty podzbiór taki, że kombinacja liniowa dowolnych wektorów z tego podzbioru w nim pozostaje, tj. $V \subset \mathbb{R}^n$ jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$ jeśli

i. $\forall_{x,y \in V}\ x + y \in V$,

ii. $\forall_{\alpha \in \mathbb{R}}\ \forall_{x \in V}\ \alpha x \in V$.

Innymi słowy podprzestrzeń to podzbiór przestrzeni „zamknięty” na dodawanie i mnożenie przez skalar. Warto pamiętać, że do podprzestrzeni zawsze musi należeć wektor zerowy (wystarczy wybrać w warunku ii. $\alpha = 0$). Najmniejszą (w sensie inkluzji) możliwą podprzestrzenią jest $\{0\} \subset \mathbb{R}^n$, zaś największą – całe $\mathbb{R}^n$.[1] Zdefiniujemy teraz co oznacza, że wektory generują (rozpinają) podprzestrzeń.

Definicja 4. Mówimy, że (pod-)przestrzeń V jest **rozpięta na wektorach** $v^1, \ldots, v^k \in \mathbb{R}^n$ (**wektory** $v^1, \ldots, v^k$ **generują (rozpinają) przestrzeń**), jeśli składa się ona z wszystkich liniowych kombinacji tych wektorów, tzn.

$$V = \operatorname{span}\{v^1, \ldots, v^k\} = \{v \in \mathbb{R}^n \colon\ \exists_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k \in \mathbb{R}}\ \ v = \alpha_1 v^1 + \ldots + \alpha_k v^k\}.$$

Zbiór $\{v^1, \ldots, v^k\}$ nazywamy **zbiorem generującym** V.

[1] Podprzestrzeniami $\mathbb{R}^3$ są np. wszystkie proste i płaszczyzny przechodzące przez początek układu współrzędnych. Proszę zastanowić się nad następującym problemem: Niech P będzie płaszczyzną przechodzącą przez początek układu współrzędnych, zaś l prostą przechodzącą przez początek układu współrzędnych. Czy $P \cup l$ jest podprzestrzenią wektorową? A co z $P \cap l$?

Oczywiście każda podprzestrzeń rozpięta na wektorach jest podprzestrzenią wektorową.

Przykład 6. Wektory $v^1 = (1,0,0)$, $v^2 = (0,1,0)$ i $v^3 = (-2,0,0)$ rozpinają płaszczyznę w $\mathbb{R}^3$. Pierwsze dwa wektory rozpinają również płaszczyznę, natomiast wektory v^1 i v^3 rozpinają tylko prostą.

Przykład 7. Kolumny macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ rozpinają $\mathbb{R}^3$.

Przykład 8. Wektory $e^1, \dots, e^n$ tworzące macierz I_n rozpinają $\mathbb{R}^n$.

4 Baza i wymiar przestrzeni wektorowej

Wektory $e^1, \dots, e^n$ rozpinają $\mathbb{R}^n$ oraz są liniowo niezależne. Z grubsza rzecz biorąc można powiedzieć, że żaden spośród tych wektorów nie jest zbędny. Prowadzi to do kolejnego kluczowego pojęcia algebry — bazy przestrzeni wektorowej.

Definicja 5. Niech $V \subset \mathbb{R}^n$. **Bazą podprzestrzeni wektorowej** V nazywamy dowolny zestaw wektorów posiadających następujące własności

1. Wektory są liniowo niezależne.

2. Generują przestrzeń V.

Pojęcie bazy jest fundamentalne dla algebry. W szczególności należy pamiętać, że istnieje dokładnie jedna reprezentacja wektora $v \in V$ za pomocą wektorów bazowych. Z drugiej strony baza $e^1, \dots, e^n \in \mathbb{R}^n$ (zwana *bazą kanoniczną* $\mathbb{R}^n$) nie jest jedyną bazą tej przestrzeni. Co więcej każda nietrywialna przestrzeń wektorowa posiada nieskończenie wiele baz. Na przykład kolumny (wiersze) dowolnej odwracalnej macierzy $n \times n$ stanowią bazę $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$. Natomiast wszystkie bazy mają jedną wspólną cechę — są równoliczne.

Twierdzenie 2. Dowolne dwie bazy przestrzeni wektorowej U składają się z takiej samej liczby wektorów.

Liczebność bazy oznacza liczbę „stopni swobody" przestrzeni i nazywana jest **wymiarem przestrzeni** V. Oznaczamy ją przez $\dim V$.[2] Dysponując tym pojęciem możemy sformułować następujące wnioski:

Wniosek 1. W k-wymiarowej podprzestrzeni zbiór więcej niż k wektorów nie może być liniowo zależny. Podobnie żaden zbiór złożony z mniej niż k wektorów nie może jej generować.

Wniosek 2. Niech V będzie podprzestrzenią wektorową $\mathbb{R}^n$

1. Każdy liniowo niezależny zbiór wektorów z V może być rozszerzony do bazy podprzestrzeni V.

2. Każdy zbiór wektorów rozpinający V może być zredukowany do bazy podprzestrzeni V.

Zatem baza jest maksymalnym liniowo niezależnym zbiorem oraz minimalnym zbiorem generującym podprzestrzeń.

Wniosek 3. Niech $\dim V = n$ i niech $v^1, \dots, v^n \in V$. Wtedy następujące warunki są równoważne:

1. $v^1, \dots, v^n$ są liniowo niezależne,

2. $v^1, \dots, v^n$ rozpinają V,

3. $v^1, \dots, v^n$ są bazą V.

[2] Oczywiście każda baza płaszczyzny składa się z dwóch wektorów, zatem jej wymiar wynosi 2. W przestrzeni trójwymiarowej potrzebujemy trzech wektorów (zadających trzy liniowo niezależne kierunki). Równocześnie np. wektory v^1, v^2, v^3 z Przykładu 6 wyznaczają dwuwymiarową podprzestrzeń $\mathbb{R}^3$, a v^1, v^2 — jednowymiarową podprzestrzeń. Naturalnie wymiar przestrzeni $\mathbb{R}^n$ wynosi n. Dla uzupełnienia obrazu zauważmy, że dowolna liczba kopii wektora zerowego (z tej samej przestrzeni) stanowi podprzestrzeń wektorową wymiaru zero (wektor zerowy jest zawsze liniowo zależny).

5 Rząd, liniowa niezależność i wymiar podprzestrzeni wektorowej

Wróćmy do pojęcia rzędu. Wiemy, że

- Jeżeli mamy sprawdzić czy wektory $v^1, \ldots, v^n$ są liniowo niezależne wystarczy stworzyć z nich macierz (ozn. A), a następnie sprawdzić, czy $\operatorname{rz} A = n$.
- Operacje elementarne na wierszach i kolumnach nie zmieniają rzędu macierzy.
- Rząd macierzy schodkowej równy jest liczbie „schodków" tej macierzy.
- Rząd macierzy równy jest wymiarowi największej odwracalnej podmacierzy kwadratowej powstałej z tej macierzy w wyniku skreślenia pewnej liczby kolumn i wierszy.

Rząd macierzy liczy się więc bardzo łatwo — zgodnie z definicją, jeśli operacje elementarne zarówno na wierszach jak i kolumnach nie zmieniają rzędu macierzy, a dla macierzy schodkowej jest to po prostu liczba jej schodków, to $\operatorname{rz} A$ jest liczbą schodków po sprowadzeniu macierzy A za pomocą operacji elementarnych (na wierszach) do postaci schodkowej. Okazuje się też, że istnieje ścisły związek pomiędzy rzędem macierzy a wymiarem odpowiedniej podprzestrzeni wektorowej. Otóż rząd macierzy A jest równy wymiarowi podprzestrzeni wektorowej rozpiętej na kolumnach (traktowanych jak wektory) macierzy A.[3] Podsumowując możemy podać następujące równoważne definicje rzędu macierzy:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rz} A &= \text{liczba niezerowych piwotów macierzy } E_A = \text{liczba niezerowych wierszy macierzy } E_A\\
&= \text{liczba liniowo niezależnych kolumn macierzy } A = \text{ liczba liniowo niezależnych wierszy macierzy } A\\
&= \text{maksymalny wymiar niezerowego minora macierzy } A\\
&= \text{wielkość (liczba kolumn lub wierszy) maksymalnej (w sensie liczby wierszy czy kolumn) odwracalnej}\\
&\quad\ \text{macierzy kwadratowej powstałej z } A \text{ w wyniku skreślenia pewnej liczby kolumn i wierszy}\\
&= \text{wymiar podprzestrzeni rozpiętej na kolumnach macierzy } A.
\end{aligned}$$

6 Twierdzenie Kroneckera-Capellego

Znając pojęcie rzędu macierzy i jego własności możemy podać ważne twierdzenia klasyfikujące układy równań liniowych.

Twierdzenie 3 (Twierdzenie Kroneckera-Capellego)**.** Układ $AX = b$ ma rozwiązanie, wtw. gdy $\operatorname{rz} A = \operatorname{rz} U$, gdzie $U = [A|b]$ (czyli b jest kombinacją liniową kolumn z macierzy A).[4]

Wniosek 4. Układ $Ax = b$

- posiada dokładnie jedno rozwiązanie, gdy $\operatorname{rz} A = \operatorname{rz} U = n$
- posiada nieskończenie wiele rozwiązań, gdy $\operatorname{rz} A = \operatorname{rz} U = r < n$, i są one zależne od $n-r$ parametrów
- nie posiada rozwiązań, gdy $\operatorname{rz} A < \operatorname{rz} U$.

Twierdzenie Kroneckera-Capellego (wraz ze wzorami Cramera) dają nam kolejną metodę rozwiązywania układów równań. Trzeba jednak pamiętać, że w praktyce spotykać się Państwo będą raczej z układami o dużej liczbie niewiadomych, a w takich przypadkach metoda Gaussa-Jordana jest istotnie szybsza. Twierdzenie Kroneckera-Capellego jest natomiast przydatne do określenia liczby rozwiązań układu gdy mamy do czynienia z układem równań z parametrem.

[3] Podprzestrzeń ta jest czasami nazywana *przestrzenią kolumnową* macierzy A.

[4] Twierdzenie to po raz pierwszy pojawiło się na wykładach Leopolda Kroneckera, które odbywały się na Uniwersytecie w Berlinie w latach 1883-1891. Z wykorzystaniem pojęcia rzędu macierzy sformułował je Alfredo Capelli w 1892 roku (za *Encyclopedia of Mathematics*).

	Fabryka 1	Fabryka 2	Fabryka 3
Poziom wyjściowy pojemności y_1	100	80	120
Wkład y_2	26	17	38
Wkład y_3	25	19	30
Wkład y_4	24	21	25

Tabela 1: Zapotrzebowania i możliwości produkcyjne fabryk

7 Ekonomiczne zastosowania

7.1 Podprzestrzenie wektorowe: zbiór technologii produkcyjnych

Podprzestrzenie wektorowe rozpięte na wektorach są naturalnym narzędziem w teorii ekonomii. Jako przykład zastosowania tego pojęcia rozpatrzmy firmę posiadającą trzy fabryki produkujące to samo dobro y. Każda fabryka jest zlokalizowana w innym regionie. Zarówno możliwości produkcyjne jak ich techniki produkcyjne są różne. Fakt ten odzwierciedlają różne zapotrzebowania na materiały. Każda technika używa ustalonej kombinacji materiałów. Zarówno wkłady jak i produkty są doskonale podzielne (tzn. ułamki są dopuszczalne). Przypuśćmy, że dane dotyczące produkcji w tych fabrykach są podane w Tabeli 1.

Niech

$$y^j = (y_1^j, -y_2^j, -y_3^j, -y_4^j),\ j = 1, 2, 3,$$

będzie j-tą techniką produkcyjną dobra y_1. Dla wygody wkłady są odróżnialne za pomocą ujemnego znaku. Przez Y oznaczmy zbiór produkcji dla y_1, tzn. zbiór wszystkich możliwych wartości wektora $y = (y_1, -y_2, -y_3, -y_4)$. Wtedy $y^j \in Y$ dla $j = 1, 2, 3$. Oczywiście $Y \subset \mathbb{R}^4$. Zauważmy, że założenia, które poczyniliśmy na temt technik produkcyjnych pozwalają nam sumować kolumny powyższej tabeli, jak również możemy przemnażać te wielkości przez skalary. W wyniku tych działań uzyskujemy nowe możliwe kombinacje typu input-output. Zatem formalnie zbiór Y składa się z kombinacji liniowych wektorów y^1, y^2, y^3. Oznacza to, że Y jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni $\mathbb{R}^4$ rozpiętą na wektorach y^1, y^2, y^3. Pozostaje ustalić jakiego wymiaru jest podprzestrzeń Y. Wiemy, że $\dim Y \leqslant 3$ ponieważ jest generowana przez co najwyżej trzy wektory. Na podstawie Wniosku 3 wiemy, że aby stwierdzić czy $\dim Y = 3$ wystarczy sprawdzić liniową niezależność wektorów y^1, y^2, y^3. Ponieważ

$$\operatorname{rz}\begin{bmatrix} y^1 & y^2 & y^3 \end{bmatrix} = \operatorname{rz}\begin{bmatrix} 100 & 80 & 120 \\ -26 & -17 & -38 \\ -25 & -19 & -30 \\ -24 & -21 & -25 \end{bmatrix} = \dim Y,$$

to z faktu, że

$$\det\begin{bmatrix} 100 & 80 & 120 \\ -26 & -17 & -38 \\ -25 & -19 & -30 \end{bmatrix} = 680 \neq 0$$

wnioskujemy, że $\dim Y = 3$. Ostatecznie zbiór technologii produkcyjnych dostępnych dla firmy jest trójwymiarową podprzestrzenią $\mathbb{R}^4$.

7.2 Równowaga na rynku (ćwiczenia)

7.2.1 Ćwiczenie 1.

Rozpatrzmy izolowany rynek dobra i. Załóżmy, że zarówno popyt (q_i^d) jak i podaż (q_i^s) tego dobra są wyłącznie funkcjami jego ceny (p_i)[5]:

$$q_i^d = \alpha_0 - \alpha_1 p_i,$$
$$q_i^s = -\beta_0 + \beta_1 p_i.$$

Podane funkcje zakładają, że istnieje liniowa zależność między wielkością popytu (podaży) a ceną dobra.[6] Zakładamy też, że wszystkie współczynniki w równaniach są dodatnie.

Mówimy, że rynek dobra i **jest w równowadze**, jeśli popyt na dobro i jest równy podaży, tzn.

$$q_i^d = q_i^s.$$

Zatem, jeśli chcemy znaleźć równowagę na rynku naszego dobra, musimy rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} q_i = \alpha_0 - \alpha_1 p_i, \\ q_i = -\beta_0 + \beta_1 p_i. \end{cases}$$

1. Używając twierdzenia Kroneckera-Capellego wyznacz warunki na to aby powyższy układ posiadał (dokładnie jedno) rozwiązanie.
2. Wyznacz rozwiązanie tego układu równań wykorzystując metodę Gaussa-Jordana.

7.2.2 Ćwiczenie 2.

Rozpatrzmy gospodarkę z trzema dobrami (q_1, q_2, q_3). Niech Y oznacza dochód. Przypuśćmy, że funkcje popytu na te dobra mają postać

$$q_1^d = -0.05p_1 + 0.02p_2 - 0.01p_3 + 0.02Y,$$
$$q_2^d = 0.01p_1 - 0.04p_2 + 0.01p_3 + 0.04Y,$$
$$q_3^d = -0.03p_1 + 0.02p_2 - 0.06p_3 + 0.01Y,$$

zaś funkcje podaży są postaci

$$q_1^s = -20 + 0.2p_1,$$
$$q_2^s = -14 + 0.3p_2,$$
$$q_3^s = -25 + 0.1p_3.$$

1. Używając twierdzenia Kroneckera-Capellego ustal od ilu parametrów zależą ceny wyznaczające równowagę.
2. Niech $Y = 1000$. Wykorzystując metodę Gaussa-Jordana znajdź ceny wszystkich dóbr w tej gospodarce, dla których mamy do czynienia z równowagą (*ceny dóbr są w równowadze*). Co się stanie z cenami jeśli dochód (Y) wzrośnie do 1200 jednostek?

Ważne pojęcia: liniowa niezależność wektorów, podprzestrzeń wektorowa rozpięta na wektorach, generowanie podprzestrzeni, baza i wymiar podprzestrzeni wektorowej, baza kanoniczna $\mathbb{R}^n$, rząd macierzy, twierdzenie Kroneckera-Capellego

[5] Oczywiście taki podstawowy model popytu i podaży jest bardzo dużym uproszczeniem. Dla przykładu założenie o izolacji rynku jest w rzeczywistości bardzo rzadko spełnione. W ekonomii zarówno popyt jak i podaż dobra są traktowane jako funkcje wielu zmiennych uwzględniających ceny innych dóbr, dochód etc. Równocześnie można jednak formułować analogiczne modele dla rynku, na którym mamy wiele dóbr (jak w kolejnym ćwiczeniu). Problem omówiony poniżej rozwiązuje się w nich analogicznie, różnicą jest liczba niewiadomych, które potrzebujemy wyznaczyć.

[6] Co prawda w tekstach ekonomicznych powyższe równania nazywane są *liniowymi* funkcjami popytu i podaży ze ściśle matematycznego punktu widzenia żadna z nich nie jest funkcją liniową a *afiniczną* (nachylenie wykresu dowolnej takiej funkcji jest stałe).