W tej części skupimy się na macierzach kwadratowych. Zakładać będziemy, że $A \in M(n,n)$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$.

Definicja 1. *Niech $A \in M(n,n)$. Wtedy* **macierzą odwrotną** *macierzy A (ozn. A^{-1}) nazywamy taką macierz $A^{-1} \in M(n,n)$, że*

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1}A = I. \tag{1}$$

Taka macierz nie zawsze musi istnieć (odpowiedni warunek na istnienie formułujemy dalej w tekście). Macierz, dla której istnieje macierz odwrotna nazywamy **odwracalną** (**nieosobliwą, niesingularną**). Macierz, dla której nie istnieje macierz spełniająca (1) nazywamy **osobliwą**.

1 Macierz odwrotna — metoda operacji elementarnych

Wprowadźmy techniczne pojęcie, które wykorzystamy w algorytmie: **macierzą blokową** nazywamy macierz, której elementami są inne macierze, np.

$$A = \left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right]$$

jest macierzą blokową. Mając to pojęcie możemy wypowiedzieć następujące twierdzenie, które pozwala nam wyznaczać macierz odwrotną przy pomocy operacji elementarnych:

Twierdzenie 1. *Niech A będzie daną macierzą kwadratową wymiaru $n \times n$, $n \in \mathbb{N}$. Rozpatrzmy macierz blokową $[A|I]$. Niech $[C|B]$ będzie macierzą uzyskaną w wyniku sprowadzenia A (w macierzy blokowej $[A|I]$) do postaci schodkowej zredukowanej za pomocą operacji elementarnych. Wtedy A jest macierzą odwracalną wtedy i tylko wtedy, gdy $C = I$. Ponadto, jeśli $C = I$, to $A^{-1} = B$.*

Komentarz: Twierdzenie 1 pozwala sformułować prosty algorytm: aby znaleźć macierz odwrotną do $A \in M(n,n)$, tworzymy macierz blokową $[A|I]$. Następnie za pomocą operacji elementarnych (podobnie jak w metodzie Gaussa-Jordana, ale pamiętając, że nie możemy zamieniać wierszy tej macierzy) przekształcamy kolejne kolumny macierzy. Jeśli A^{-1} istnieje, to w wyniku przekształceń otrzymamy macierz $[I|B]$, gdzie B będzie szukaną macierzą odwrotną do A. Natomiast jeśli nie będzie możliwe sprowadzenie macierzy $[A|I]$ do tej postaci, to macierz odwrotna nie istnieje.

Przykład A. Niech

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Wyznaczmy macierz odwrotną do A wykorzystując metodę operacji elementarnych.

$$\left[\begin{array}{c|c} A & I \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1 \to -w_1} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{w_3 \to w_3 + 3w_2 \\ w_4 \to w_4 - w_2}]{\substack{w_2 \to \frac{1}{4}w_2 \\ w_1 \to w_1 + 2w_2}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{w_2 \to w_2 - \frac{1}{4}w_3 \\ w_4 \to w_4 + \frac{1}{4}w_3}]{\substack{w_3 \to \frac{4}{7}w_3 \\ w_1 \to w_1 + \frac{1}{2}w_3}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{7} & -1 & \frac{5}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{7} & 0 & \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{7} & 0 & \frac{3}{7} & \frac{4}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{7} & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{w_2\to w_2+\frac{1}{7}w_4\\ w_3\to w_3+\frac{3}{7}w_4}]{\substack{w_4\to 7w_4\\ w_1\to w_1+\frac{5}{7}w_4}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 5\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 7 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I & A^{-1}\end{array}\right].$$

Zatem

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

Przykład B. Niech $B = \begin{bmatrix} 1 & -3\\ -4 & 12\end{bmatrix}$. Wtedy

$$\left[\begin{array}{c|c} B & I\end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 1 & 0\\ -4 & 12 & 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow{w_2\to w_2+4w_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 1\end{array}\right].$$

W drugim wierszu i drugiej kolumnie otrzymanej macierzy mamy zero, co powoduje, że macierzy A nie możemy przy pomocy operacji elementarnych przekształcić do macierzy I. Zatem A^{-1} nie istnieje.

2 Wyznacznik macierzy

W tej części wprowadzimy i omówimy własności **wyznacznika macierzy**, czyli odwzorowania $\det\colon M(n,n) \mapsto \mathbb{R}$.

Na wykładzie dokładniej omówiliśmy przypadek $n = 2$ i wyprowadziliśmy wzór na macierz odwrotną do

$$A = \begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix},$$

gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Kluczowym założeniem, które potrzebne było do otrzymania macierzy odwrotnej było

$$ad - bc \neq 0.$$

Jest to wyznacznik macierzy:

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix} \overset{\text{dF}}{=} ad - bc.$$

Można ją wprowadzić dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Aby to zrobić (przy pomocy tzw. rozwinięcia Laplace'a) wprowadzamy dwa pojęcia:

Definicja 2. *Dla danej macierzy $A \in M(m,n)$* **minorem stopnia** *k, gdzie $k < \min\{m,n\}$ nazywamy wyznacznik macierzy kwadratowej stopnia k otrzymanej z macierzy A poprzez wykreślenie $m-k$ wierszy i $n-k$ kolumn.*

Pisząc $\det A_{ij}$ mamy na myśli minor macierzy otrzymany poprzez wykreślenie z macierzy A i-tego wiersza i j-tej kolumny ($i \in \{1,\dots,m\}$, $j \in \{1,\dots,n\}$).

Definicja 3. Dopełnieniem algebraicznym i-tego wiersza i j-tej kolumny macierzy *A nazywamy*

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}\det A_{ij}.$$

Wyznacznik zadajemy indukcyjnie ze względu na wymiar macierzy.

Definicja 4. *Niech* $A = (a_{ij}) \in M(n,n)$.
Jeśli $n = 1$, $A = [a]$, $a \in \mathbb{R}$, *to* $\det A \overset{dF}{=} a$.
Dla $n \geqslant 2$ *wyznacznik macierzy zadajemy jako*

$$\det A \overset{dF}{=} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij} \tag{2}$$

dla $j \in \{1, \dots, n\}$ *lub równoważnie jako*

$$\det A \overset{dF}{=} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij} \tag{3}$$

dla $i \in \{1, \dots, n\}$.

Równania (2), (3) będziemy nazywali rozwinięciami Laplace'a wyznacznika macierzy A względem j-tej kolumny (i-tego wiersza).

Przykład. Niech

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Wtedy, rozwijając względem pierwszego wiersza, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} \\ &= a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \\ &= a_{11} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Twierdzenie 2 (Własności wyznacznika)**.** *Niech* $A \in M(n,n)$. *Wtedy*

1. $\det A^T = \det A$;
2. *Zamiana dwóch wierszy w macierzy zmienia jego znak na przeciwny;*
3. *Jeśli* A *posiada dwa identyczne wiersze/kolumny, to* $\det A = 0$;
4. *Jeśli* B *jest macierzą otrzymaną z macierzy* A *przy pomocy operacji* $w_i \to w_i + \alpha w_j$, $\alpha \in \mathbb{R}$, *to* $\det B = \det A$ *(takie operacje nie zmieniają wyznacznika, choć macierz, zazwyczaj, się zmienia);*
5. *Jeśli* A *jest górnie (dolnie) trójkątna, to jej wyznacznik jest równy iloczynowi współczynników z głównej przekątnej:*
$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_i;$$
6. *Jeśli* B *jest macierzą otrzymaną z macierzy* A *poprzez przemnożenie przez* $\lambda \in \mathbb{R}$ *jednego z wierszy, to* $\det B = \lambda \det A$;
7. *Jeśli* $B \in M(n,n)$, *to* $\det A \cdot B = \det A \cdot \det B$.

Metoda Sarrusa. Dla $n = 3$ wyznacznik macierzy możemy wyznaczać korzystając z tzw. wzoru Sarrusa. Niech $n = 3$, $A = (a_{ij})$. Wtedy

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{11}a_{32}a_{23} + a_{21}a_{12}a_{33}).$$

Komentarz: Efektywne obliczeniowo wzory na wyznacznik mamy tylko dla $n = 1, 2, 3$. Rozwinięcie Laplace'a pozwala sprowadzić problem obliczania wyznacznika macierzy wymiaru n do obliczania n wyznaczników macierzy wymiaru $n-1$, $n(n-1)$ wyznaczników macierzy wymiaru $n-2$ itd. Oznacza to, że aby obliczyć wyznacznik macierzy dla $n > 2$ wystarczy $(n-2)$ razy ($(n-1)$ razy) rozwinąć wyznacznik względem któregoś wiersza (kolumny) sprowadzając problem do obliczenia co najwyżej $3 \cdot 4 \cdots (n-1) \cdot n$ wyznaczników macierzy 2×2 (lub $4 \cdot 5 \cdots (n-1) \cdot n$ wyznaczników macierzy 3×3).

3 Macierz odwrotna — w.k.w. istnienia

Mając pojęcie wyznacznika macierzy możemy sformułować twierdzenie dotyczące istnienia macierzy odwrotnej:

Twierdzenie 3. *Niech $A \in M(n, n)$. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(a) A jest odwracalna (nieosobliwa),

(b) $\det A \neq 0$,

(c) istnieje $B \in M(n, n)$, takie że $AB = I$ (i wtedy $B = A^{-1}$),

(d) istnieje $B \in M(n, n)$, takie że $BA = I$ (i wtedy $B = A^{-1}$).

4 Macierz odwrotna – metoda dopełnień algebraicznych

Macierz odwrotną można wyznaczyć przy pomocy operacji elementarnych. Druga opcja to tzw. metoda dopełnień algebraicznych. Niech $A = (a_{ij})_{nn}$. Zdefiniujmy macierz $A^D = (C_{ij})$ gdzie $C_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$. Macierz

$$\left(A^D\right)^T = \begin{bmatrix} C_{11} & \dots & C_{n1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{1n} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix},$$

nazywać będziemy **macierzą dopełnień algebraicznych macierzy** A. Jeśli $\det A \neq 0$, to macierz odwrotna A^{-1} istnieje i zadana jest wzorem

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (A^D)^T = \frac{1}{\det A} [(-1)^{i+j} \det A_{ij}]^T.$$

Komentarz: Podczas tego wykładu poznali Państwo dwie metody wyznaczania macierzy odwrotnej. Naturalnym pytaniem jest, która z nich jest szybsza. Można powiedzieć, że dla $n = 2, 3$ nie ma znaczenia którą z metod wybierzemy (dla $n = 2$, możemy też po prostu korzystać z wyprowadzonego na wykładzie wzoru). Natomiast dla $n > 3$ metoda operacji elementarnych jest zdecydowanie bardziej efektywna.

Ważne pojęcia i metody: macierze: odwrotna, odwracalna (nieosobliwa), blokowa, dopełnień algebraicznych; wyznacznik, minor, dopełnienie algebraiczne, metoda operacji elementarnych, metoda dopełnień algebraicznych.

Wzory Cramera

Znając metodę dopełnień algebraicznych możemy wyprowadzić wzory zadające rozwiązanie oznaczonego układu równań liniowych — tzw. wzory Cramera. Rozpatrzmy równanie

$$AX = b,$$

gdzie A jest odwracalną macierzą kwadratową $n \times n$. Spróbujmy wyliczyć $X = \begin{bmatrix} x_1 \dots x_n \end{bmatrix}^T$. Oczywiście $X = A^{-1}b$, więc

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \det A_{11} & \dots & (-1)^{n+1} \det A_{n1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (-1)^{1+n} \det A_{1n} & \dots & (-1)^{2n} \det A_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

czyli

$$x_k = \frac{1}{\det A}((-1)^{1+k} \det A_{1k} b_1 + \dots + (-1)^{k+n} \det A_{nk} b_n).$$

Zauważmy, że $(-1)^{1+k} \det A_{1k} b_1 + \dots + (-1)^{k+n} \det A_{nk} b_n$, to po prostu wyznacznik macierzy powstałej z A przez zamienienie k-tej kolumny A przez b. Oznaczając ją przez A_k otrzymujemy

$$x_k = \frac{\det A_k}{\det A} \tag{4}$$

dla $k = 1, \dots, n$. Wzory (4) nazywamy *wzorami Cramera*.