1 Macierz – definicja i zapis

Macierzą wymiaru m na n nazywamy tabelę

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

złożoną z liczb (rzeczywistych lub zespolonych) o m wierszach i n kolumnach (zamiennie będziemy też czasem mówili, że *„A jest macierzą m na n/m×n”* lub *„A jest wymiaru m×n”*.[1] Takie macierze oznaczamy przez $(a_{ij})_{mn}$ lub skrótowo (a_{ij}). Liczby a_{ij} nazywamy *współczynnikami macierzy*. Zbiór macierzy wymiaru $m \times n$ o współczynnikach rzeczywistych oznaczamy przez $M(m, n)$. Przez *przekątną główną* macierzy rozumiemy elementy (a_{ii}). Dwie macierze są równe, gdy są tego samego wymiaru oraz ich współczynniki są sobie równe, tzn. $(a_{ij}) = (b_{ij})$ wtw., gdy $\forall_{i\in\{1,\dots,m\}, j\in\{1,\dots,n\}}\ a_{ij} = b_{ij}$.

2 Przegląd macierzy

- macierze $m \times 1$ — **wektory** (kolumnowe), np.
  $A = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$;
- macierze **kwadratowe** (gdy $m = n$), np.
  $A = \begin{bmatrix} -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$;
- macierze **diagonalne** — macierze kwadratowe, których jedyne niezerowe elementy znajdują się na głównej przekątnej, np. $A = \begin{bmatrix} -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$;
- macierze **jednostkowe** (**identyczności**) – macierze diagonalne, które na przekątnej mają same jedynki: $I_1 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$, $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;[2]
- macierzą **zerową** (ozn. ją przez 0 ($0 \in M(m, n)$), z kontekstu wnosząc jaki jest jej wymiar) jest (dowolna) macierz złożona z samych zer.
- macierze **górnie trójkątne** to macierze, które poniżej głównej przekątnej mają same zera (dualnie: **dolnie trójkątne** to takie, które powyżej głównej przekątnej mają same zera), np. $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$,
  $C = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

[1] Aby uprościć notację i zawęzić na razie naszą uwagę, wszystkie definicje i twierdzenia formułujemy dla macierzy o współczynnikach rzeczywistych, ale analogiczne definicje i twierdzenia zachodzą dla macierzy o współczynników zespolonych.

[2] W obliczeniach zazwyczaj będziemy opuszczać indeksy pisząc I, wymiar macierzy wnioskując z kontekstu.

3 Działania na macierzach

3.1 Dodawanie macierzy

Możemy dodawać jedynie macierze posiadające tę samą liczbę kolumn i wierszy. Dla $A, B \in M(m, n)$, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ mamy

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}).$$

Podobnie

$$A - B = (a_{ij} - b_{ij}).$$

Łatwo można sprawdzić, że

- $0 + A = A + 0 = A$ (mówimy, że $0 \in M(m, n)$ *jest elementem neutralnym dodawania w* $M(m, n)$),
- $A + B = B + A$ (*dodawanie macierzy jest przemienne*),
- $(A + B) + C = A + (B + C)$ (*dodawanie macierzy jest łączne*)

3.2 Mnożenie przez skalar

Jeśli $\alpha \in \mathbb{R}$, $A = (a_{ij})$, to

$$\alpha \cdot A = (\alpha a_{ij}).$$

3.3 Mnożenie macierzy

Mnożenie macierzy (na pierwszy rzut oka) nie jest tak intuicyjne jak ich dodawanie. Taka a nie inna jego postać wynika z zależności pomiędzy odwzorowaniami liniowymi i ich macierzami (zależności te omówione są nieco dalej w tekście, patrz pkt 4.3). Należy pamiętać, że dla dowolnych macierzy A, B:

$A \cdot B$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy liczba kolumn A odpowiada liczbie wierszy B

Wtedy jeśli $A \in M(m, n)$, $B \in M(n, p)$ (czyli liczba kolumn pierwszej macierzy równa jest drugiej), to $C = A \cdot B$ istnieje, oraz $C = (c_{ij}) \in M(m, p)$, gdzie

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Aby łatwiej było zapamietać jak mnoży się macierze warto zauważyć, że w i-tym wierszu, j-tej kolumnie macierzy $C = A \cdot B$ mamy wartość iloczynu skalarnego i-tego wiersza macierzy A, $w_i(A)$, i j-tej kolumny macierzy B, $k_j(B)$ (traktowanych jako wektory z $\mathbb{R}^n$), czyli

$$c_{ij} = \langle w_i(A), k_j(B) \rangle.$$

Własności mnożenia macierzy

- Dla dowolnych macierzy A, B, C, które można przemnożyć, mamy $A(BC) = (AB)C$;
- mnożenie macierzy NIE JEST PRZEMIENNE (nawet w przypadku mnożenia macierzy kwadratowych);
- jeśli A jest macierzą kwadratową, to $AI = IA = A$.

3.4 Transponowanie macierzy

Niech $A \in M(m,n)$. *Macierz transponowana* A^T (*transpozycja macierzy* A), to macierz, która powstaje poprzez zamianę wierszy z kolumnami. Np. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

Własności transponowania. Zakładając, że A, B są takie, że odpowiednie działania można wykonać, mamy

- jeśli $A \in M(m,n)$, to $A^T \in M(n,m)$,
- $\left(A^T\right)^T = A$,
- $(A+B)^T = A^T + B^T$,
- $(AB)^T = B^T A^T$.

Warto też zauważyć, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}^n$ mamy

$$\langle x, y\rangle = x^T y.$$

3.5 Ślad macierzy

Ślad macierzy A to suma współczynników znajdujących się na głównej przekątnej:

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{m} a_{ii}.$$

4 Macierz odwzorowania liniowego

4.1 Reprezentacja odwzorowania liniowego

Niech $A \in M(m,n)$, $v \in \mathbb{R}^n$, czyli

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}.$$

Wtedy

$$Av = \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{1i} v_i \\ \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_{mi} v_i \end{bmatrix}.$$

Przypomnijmy, że odwzorowanie (przekształcenie) $T\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ jest **liniowe**, jeśli dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}^n$ i $\alpha \in \mathbb{R}$ zachodzą równości:

$$T(x+y) = T(x) + T(y) \quad \text{i} \quad T(\alpha x) = \alpha T(x).$$

Kluczowy dla nas jest następujący fakt:

Uwaga 1. *Odwzorowanie liniowe T może być utożsamiane z macierzą $\mathbf{M}_T$ wymiaru $m \times n$, gdzie*

$$T(x) = \mathbf{M}_T \cdot x.$$

Uzasadnienie Uwagi 1 — wyprowadzenie.
Niech
$$e^1 = \begin{bmatrix}1 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}^T, e^2 = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}^T, \dots, e^n = \begin{bmatrix}0 & 0 & \dots & 0 & 1\end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^n$$
oraz
$$f^1 = \begin{bmatrix}1 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}^T, f^2 = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}^T, \dots, f^m = \begin{bmatrix}0 & 0 & \dots & 0 & 1\end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^m.$$
Niech $T\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ będzie przekształceniem liniowym. Wtedy
$$T(e_j) = a_{1j} f^1 + ... + a_{mj} f^m = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f^i,$$
dla $a_{1j}, ..., a_{mj} \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$. Stąd dla dowolnego $x \in \mathbb{R}^n$ mamy:
$$x = x_1 e^1 + x_2 e^2 + ... + x_n e^n,\ x = (x_1, ..., x_n),$$
$$y = T(x) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) f^i.$$
Widzimy, że odwzorowanie T jest jednoznacznie wyznaczone przez współczynniki a_{ij}. Co więcej, łatwo zauważyć, że
$$\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) f^i = \mathbf{M}_T \cdot x,$$
gdzie
$$\mathbf{M_T} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$
jest **macierzą odwzorowania** T. Kolumny macierzy M_T tworzą wektory, które są obrazami wektorów $e^1, \dots, e^n$ poprzez przekształcenie liniowe T:
$$\mathbf{M_T} = [T(e^1)\, T(e^2) \dots T(e^n)].$$
Ostatecznie mamy
$$T(x) = \mathbf{M}_T \cdot x.$$
Oznacza to, że zamiast badać odwzorowanie liniowe $T\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, możemy badać jego macierz $M_T \in M(m, n)$.

4.2 Przekształcenia płaszczyzny

- identyczność:
$$T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}, \quad M_T = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix};$$
- „rozciąganie i ściąganie”:
$$T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}ax_1\\bx_2\end{bmatrix}, \quad M_T = \begin{bmatrix}a & 0\\0 & b\end{bmatrix};$$
- Symetria względem prostej $y = x$:
$$T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}x_2\\x_1\end{bmatrix}, \quad M_T = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix};$$
- Obrót o kąt $\alpha \in [0, 2\pi)$:
$$T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}\cos\alpha x_1 - \sin\alpha x_2\\ \sin\alpha x_1 + \cos\alpha x_2\end{bmatrix}, \quad R_\alpha = \begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}.$$

4.3 Sumowanie i mnożenie macierzy a odwzorowania liniowe

To w jaki sposób (i kiedy) dodajemy i mnożymy macierze jest ściśle związane ze związkami macierzy z odwzorowaniami liniowymi. Dokładniej,

1. jeśli $S, T\colon \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$, ich macierze to $M_S, M_T \in M(n,m)$, to $M_{S+T} = M_S + M_T$, gdzie M_{S+T} jest macierzą odwzorowania $S+T$,

2. jeśli $S\colon \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}^m$, $T\colon \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ ich macierze to $M_S \in M(m,p), M_T \in M(n,m)$, to $M_{T\circ S} = M_T \cdot M_S$, gdzie $M_{T\circ S}$ jest macierzą odwzorowania $T \circ S$.

Ważne pojęcia i zagadnienia: macierz, współczynniki macierzy, rodzaje macierzy, dodawanie, mnożenie, transpozycja macierzy i własności tych działań, reprezentacja odwzorowania liniowego, macierz odwzorowania liniowego macierze wybranych przekształceń płaszczyzny, zastosowania ekonomiczne macierzy.