Projekt „Uruchomienie unikatowego kierunku studiów Informatyka Stosowana odpowiedzią na zapotrzebowanie rynku pracy”
jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

Metody numeryczne

materiały do ćwiczeń

dla studentów

7. Całkowanie numeryczne

Materiały przygotowane w ramach projektu „Uruchomienie unikatowego kierunku studiów Informatyka Stosowana odpowiedzią na zapotrzebowanie rynku pracy” ze środków Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki współfinansowanego ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego nr umowy UDA – POKL.04.01.01-00-011/09-

I. Wiadomości wstępne

Wymagana jest znajomość następujących pojęć:

- całka nieoznaczona;
- całka oznaczona;

oraz umiejętności:

- obliczanie podstawowych całek oznaczonych i nieoznaczonych;
- obliczanie pochodnych funkcji;
- wyznaczanie ekstremów funkcji na przedziałach.

II. Zadania

zad. 1) Oblicz daną całkę analitycznie, a następnie przy pomocy poznanych wzorów kwadratur wyznacz jej przybliżoną wartość (przyjmij $n = 1$).

a) $\int_{-1}^{5}(x+1)dx;$ b) $\int_{-2}^{4}(x^3-3)\ dx;$ c) $\int_{-3}^{3}(2x-x^4)\ dx.$

zad. 2) Oblicz poniższą całkę analitycznie oraz jej przybliżone wartości wykorzystując wzory kwadratur dla $n = 1$ oraz $n = 2$. Porównaj uzyskane wyniki i rzeczywiste błędy przybliżenia z teoretycznymi oszacowaniami błędów.

a) $\int_{0}^{\pi} \sin^2 x\, dx,$

b) $\int_{-2}^{4} \frac{x^2-2}{x+3} dx.$

zad. 3) Wykorzystując metodę 3/8 Newtona lub metodę parabol wyznacz trzy pierwsze przybliżenia wartości:

a) $\ln 2,$

b) $\operatorname{arctg} 3.$

III. Zadania do samodzielnego rozwiązania

zad. 1) Dla podanych całek oznaczonych wykorzystaj wzory kwadratur dla uzyskania ich wartości przybliżonych. Przyjmij najpierw $n = 1$, a następnie $n = 2$.

a) $\int_{1}^{4}\left(x^2-x-\frac{1}{x}\right)dx$, b) $\int_{0}^{\pi} x^2\cos^2 x\ dx$, c) $\int_{-5}^{1}\frac{x}{x-2}dx.$

zad. 2) Oblicz na ile podprzedziałów należy podzielić przedział $[1, 2]$, aby błąd przybliżenia wartości poniższej całki wybraną metodą był nie większy niż:

a) 10^{-5}, b) 10^{-7}, c) 10^{-9}.

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$$

zad. 3) Ryzyko urazu głowy w wypadku samochodowym może być opisane wskaźnikiem HIC (Head Injury Criterion). Jego postać opisana jest formułą:

$$HIC = \max_{0\le t_1\le t_2\le T}(t_2 - t_1)\left(\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} a(t)\,dt\right)^{2,5}$$

gdzie $a(t)$ jest funkcją opisującą siły bezwładności na skutek których dochodzi do urazu (proporcjonalną do przyspieszenia), a T jest czasem hamowania samochodu poruszającego się początkowo z prędkością ok. 50 km/h. Oszacuj wartość wskaźnika HIC wykonując kolejne kroki:

- wyznacz średnią wartość funkcji $a(t)$ na przedziale $[50, 110]$
$$a(t) = \frac{16\,400}{(t-68)^2 + 400} + \frac{1\,480}{(t-93)^2 + 18}$$
obliczając metodą parabol lub 3/8 Newtona dla $n = 2$ całkę z tej funkcji i dzieląc ją przez długość przedziału całkowania, tj.
$$\bar{a} = \frac{1}{60}\int_{50}^{110} a(t)\,dt$$
(argument t funkcji $a(t)$ podany jest w milisekundach);
- następnie wyznacz przybliżoną wartość wskaźnika HIC obliczając wyrażenie:
$$HIC \approx (\bar{a})^{2,5}\cdot 0{,}06$$
gdzie 0,06 jest długością okna całkowania wyrażoną w sekundach;
- wartości wskaźnika HIC powyżej $1\,000$ oznaczają zagrożenie ludzkiego życia. Porównaj powyższy wynik z podobnie oszacowaną wartością wskaźnika HIC dla funkcji $a_A(t)$, opisującą przypadek z poduszką powietrzną w samochodzie:
$$a_A(t) = \frac{22\,000}{(t-74)^2 + 500}$$

Odpowiedzi

zad. 1)

a) $\int_1^4 \left(x^2 - x - \frac{1}{x}\right)dx = \frac{27}{2} - 2\ln 2 \approx 12{,}1137$

Metoda	Trapezów	Parabol	3/8 Newtona
$n = 1$	$\frac{129}{8} = 16{,}125$	$\frac{483}{40} = 12{,}075$	$\frac{387}{32} = 12{,}094$

$n = 2$	$\frac{1\,047}{80} = 13{,}088$	$\frac{88\,149}{7\,280} = 12{,}108$	$\frac{27\,129}{2\,240} = 12{,}111$

b) $\int_0^{\pi} x^2 \cos^2 x \; dx = \frac{\pi^3}{6} + \frac{\pi}{4} \approx 5{,}953111$

Metoda	Trapezów	Parabol	3/8 Newtona
$n = 1$	$\frac{\pi^3}{2} \approx 15{,}503$	$\frac{\pi^3}{6} \approx 5{,}168$	$\frac{17\pi^3}{96} \approx 5{,}490$
$n = 2$	$\frac{\pi^3}{4} \approx 7{,}752$	$\frac{3\pi^3}{16} \approx 5{,}814$	$\frac{73\pi^3}{384} \approx 5{,}894$

c) $\int_{-5}^{1} \frac{x}{x-2} dx = 6 - 2\ln 7 \approx 2{,}10818$

Metoda	Trapezów	Parabol	3/8 Newtona
$n = 1$	$-\frac{6}{7} \approx -0{,}857$	$\frac{12}{7} \approx 1{,}714$	$\frac{66}{35} \approx 1{,}886$
$n = 2$	$\frac{15}{14} \approx 1{,}071$	$\frac{1\,563}{770} \approx 2{,}03$	$\frac{579}{280} \approx 2{,}068$

zad. 2)

Błąd maksymalny	Met. trapezów	Met. parabol	Met. 3/8 Newtona
10^{-5}	$n = 130$	$n = 6$	$n = 5$
10^{-7}	$n = 1\,291$	$n = 17$	$n = 14$
10^{-9}	$n = 12\,910$	$n = 54$	$n = 44$

zad. 3)

Metoda	Parabol	3/8 Newtona
Bez poduszki pow.	571	688
Z poduszką powietrzną	297	297