Projekt „Uruchomienie unikatowego kierunku studiów Informatyka Stosowana odpowiedzią na zapotrzebowanie rynku pracy”
jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

Metody numeryczne

materiały do ćwiczeń

dla studentów

4. Wartości własne i wektory własne

Materiały przygotowane w ramach projektu „Uruchomienie unikatowego kierunku studiów Informatyka Stosowana odpowiedzią na zapotrzebowanie rynku pracy” ze środków Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki współfinansowanego ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego nr umowy UDA – POKL.04.01.01-00-011/09-

I. Wiadomości wstępne

Wymagana jest znajomość następujących pojęć:

- wektor, macierz, wyznacznik macierzy, ślad macierzy;
- wielomian, pierwiastek wielomianu;
- wartość własna, wektor własny.

oraz umiejętności:

- obliczania wyznacznika macierzy oraz wyznaczania śladu macierzy;
- wykonywania podstawowych operacji macierzowych;
- rozwiązywania prostych równań wielomianowych;
- rozwiązywania układów równań liniowych (dowolną metodą).

II. Zadania

zad. 1) Wyznaczyć dokładne wartości wartości własnych i odpowiadających im wektorów własnych dla macierzy:

a) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$;

b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}$.

zad. 2) Wartości własne macierzy A są częstotliwościami drgań własnych pewnego mostu. Częstotliwość siły wymuszającej wynosi μ. Most może wpaść w rezonans, jeśli odległość pomiędzy częstotliwością siły wymuszającej a którąkolwiek z częstotliwości drgań własnych jest mniejsza od 1. Czy za pomocą któregoś ze znanych z wykładu twierdzeń o lokalizacji wartości własnych można udowodnić, że most nie wpadnie w rezonans?

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \ \mu = -5{,}5;$

b) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 11 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \ \mu = 7.$

zad. 3) Czy za pomocą twierdzenia o kołach Gerszgorina można rozstrzygnąć, czy wszystkie wartości własne poniższej macierzy mają ujemną część rzeczywistą?

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -7 \end{bmatrix}.$$

zad. 4) Korzystając z metody potęgowej wyznaczyć przybliżoną dominującą wartość własną i odpowiadający jej wektor własny dla poniższych macierzy (użyć w tym celu 4 iteracji metody, obliczając y^4):

a) $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}; y^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}; y^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$

zad. 5) Za pomocą metody potęgowej uporządkować strony według Page Rank, jeśli sieć składa się z następujących linków: $1 \to 2, 2 \to 3, 3 \to 4,\ 4 \to 1, 1 \to 4, 2 \to 4$. Rozpocząć od wektora $(1,1,1,1)^T$ i wykonać 4 iteracje metody potęgowej.

zad 6) (dodatkowe) Wyznaczyć pozostałe wartości własne macierzy z zadania 4 a).

III. Zadania do samodzielnego rozwiązania

zad. 1) Wyznaczyć dokładne wartości wartości własnych i odpowiadających im wektorów własnych dla macierzy:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix};.$

b) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}.$

zad. 2) Wartości własne macierzy A są częstotliwościami drgań własnych pewnego budynku. Częstotliwość siły wymuszającej wynosi μ. Most może wpaść w rezonans, jeśli odległość pomiędzy częstotliwością siły wymuszającej a którąkolwiek z częstotliwości drgań własnych jest mniejsza od 1. Czy za pomocą któregoś ze znanych z wykładu twierdzeń o lokalizacji wartości własnych można udowodnić, że most nie wpadnie w rezonans?

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix},\ \mu = 8;$

b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mu = 7$.

zad. 3) Czy za pomocą twierdzenia o kołach Gerszgorina można rozstrzygnąć, czy wszystkie wartości własne poniższej macierzy mają ujemną część rzeczywistą?

a) $\begin{bmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 1 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$;

b) $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & -8 \end{bmatrix}$.

zad 4.) Korzystając z metody potęgowej wyznaczyć przybliżoną dominującą wartość własną i odpowiadający jej wektor własny dla poniższych macierzy (użyć w tym celu 5 iteracji metody):

a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}; y^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$;

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}; y^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

zad 5.) Uporządkować strony algorytmem Page Rank, jeśli sieć składa się z następujących linków:

a) $4 \to 1, 2 \to 3, 2 \to 4, 3 \to 4, \; 4 \to 2$;

b) $1 \to 2, \; 1 \to 4, \; 2 \to 1, \; 2 \to 3, 2 \to 5, 3 \to 1, 3 \to 2, 3 \to 4, 3 \to 5, 5 \to 2$.

Rozpocząć od wektora $(1, \dots, 1)^T$ i wykonać 5 iteracji metody potęgowej.

zad. 6) Populacja królików składa się obecnie z 24 królików żyjących krócej niż rok, 24 królików żyjących dłużej niż rok, ale krócej niż dwa lata i 20 królików żyjących dłużej niż 2 lata. Maksymalny czas życia królików to 3 lata. Połowa nowonarodzonych królików dożyje następnego roku. Spośród nich połowa przeżyje następny rok. Ponadto podczas pierwszego roku swojego życia króliki nie mają potomstwa. Króliki ze środkowej klasy wiekowej mają sześcioro potomstwa, zaś króliki najstarsze ośmioro potomstwa. Wszystkie powyższe dane przedstawiono za pomocą wektora x_0 oraz macierzy A:

$$x_0 = \begin{bmatrix} 24 \\ 24 \\ 20 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 8 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix},$$

Populację królików w kolejnym roku wyznaczamy poprzez wymnożenie obecnej populacji królików przez macierz A. Ponadto populacja pozostaje w stanie równowagi, jeśli w każdym roku wzrost osobników w populacji jest proporcjonalny do wektora x, tzn. $Ax = \lambda x$, dla pewnej stałej λ. Za pomocą metody potęgowej, wykonując sześć iteracji, wyznacz dominującą wartość stałej λ oraz odpowiadający jej wektor. Odpowiedz na pytanie, która grupa wiekowa w populacji królików będzie dominować, a która będzie najmniej liczna.

Wskazówka:

Zauważ, że λ jest wartością własną macierzy A i zastosuj metodę potęgową, aby ją wyznaczyć. Odpowiedzi na pytanie, która grupa wiekowa będzie dominować udziel na podstawie wektora własnego odpowiadającego wyznaczonej wartości własnej λ.

IV. Odpowiedzi

zad. 1)

a) wartości własne: $7,3,-1$, wektory własne: $(2,3,2), (0,0,1), (-2,1,0)$;

b) wartości własne: $11,7,0$, wektory własne: $(1,2,0), (1,6,4), (-27,34,11)$;

zad. 2)

a) tak, za pomocą twierdzenia 4.4;

b) tak, za pomocą twierdzenia Gerszgorina.

zad. 3)

a) nie;

b) tak.

zad. 4)

a) $4,99$; $(1672,2500,5000)$; (faktyczna dominująca wartość własna: 5)

b) $-2,55$; $(85,19,160)$ (faktyczna dominująca wartość własna: $-2,81$).

zad. 5)

a) $(4,1 = 2,3)$, zgodnie z wektorem: $(0,972;\ 0,972;\ 0,683;\ 1,374)$

b) $(2,4,1 = 5,3)$, zgodnie z wektorem: $(1,5;\ 2,749;\ 1,22;\ 2,555; 1,5)$.

zad. 6) $x_6 = \begin{bmatrix} 5256 \\ 1608 \\ 278 \end{bmatrix}$ stąd $\lambda_1 = \frac{6353047}{3352680} \approx 1,89$ (faktyczna dominująca wartość własna: 2)

Wektor własny: $w^{(1)} = \begin{bmatrix} 3216 \\ 556 \\ 240 \end{bmatrix}$ (faktyczny wektor własny: $\begin{bmatrix} 64 \\ 16 \\ 4 \end{bmatrix}$)

Dominująca będzie grupa królików żyjących krócej niż rok, a najmniej liczna będzie grupa królików żyjących dłużej niż 2 lata.