



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt „Uruchomienie unikatowego kierunku studiów Informatyka Stosowana odpowiedzią na zapotrzebowanie rynku pracy”  
jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

---

# Metody numeryczne

materiały do ćwiczeń  
dla studentów

## 3. Metody iteracyjne rozwiązywania układów równań liniowych

- 3.1. Metoda iteracji prostej
- 3.2. Metoda Seidela
- 3.3. Zbieżność metod iteracyjnych i warunek stopu

## I. Wiadomości wstępne

Wymagana jest znajomość następujących pojęć:

- wektor, macierz, wyznacznik macierzy;
- równanie macierzowe;
- macierz trójkątna;

oraz umiejętności:

- wykonywanie operacji elementarnych na wierszach macierzy;
- mnożenie macierzy;
- rozwiązywanie równań macierzowych

## II. Zadania

zad. 1) Jaki jest warunek wystarczający zbieżności metod iteracyjnych określonych schematami:

$$X^{(n+1)} = DX^{(n)} + C, \quad X^{(n+1)} = EX^{(n+1)} + FX^{(n)} + C.$$

zad. 2) Sprawdzić, czy podane macierze spełniają WW zbieżności metod iteracyjnych prostej i Seidela dla macierzy:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,3 & 0,2 \\ 0,4 & 0,9 & 0,3 \\ 0 & 0,5 & 0,7 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 & 1 \\ 0 & 0,9 & 1 \\ 0 & 0 & 0,3 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 0 & 8 & 2 \\ -5 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

zad. 3) Obliczyć normę macierzy:

$$D_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

a następnie sprawdzić, po ilu iteracjach w schemacie opartym na tych macierzach rozwiązanie będzie oszacowanie z błędem nie większym niż  $10^{-2}$ , jeśli  $X^{(0)} = [2 \ -1 \ 0]^T$ .

zad. 4) Podać dwa pierwsze przybliżenia obu metod iteracji, wybierając jako przybliżenie początkowe  $X^{(0)} = C$ :

$$a) \begin{cases} 4x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3x_1 - 1x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

zad. 5) Zapisać uproszczoną macierz Google'a dla sieci:

$$1 \rightarrow 2, \quad 2 \rightarrow 3, \quad 2 \rightarrow 4, \quad 3 \rightarrow 1.$$

Stosując metodę iteracji prostej do odpowiedniego układu równań oszacować wartość wag i sporządzić ranking stron.

zad. 6) Podany układ równań zapisać w postaci równoważnej tak, aby spełniony był warunek wystarczający zbieżności metod przybliżonych:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 7x_1 + x_2 - 4x_3 = 2 \end{cases}$$

### III. Zadania do samodzielnego rozwiązania

zad. 1) Dla podanych układów równań wykonaj kolejno polecenia:

1. oblicz normę macierzy  $D$  odpowiadającej układowi i zdecyduj, czy schematy są zbieżne;
2. wyznacz liczbę iteracji konieczną do uzyskania wyniku z dokładnością  $\varepsilon = 10^{-9}$ ;
3. rozwiąż układ jedną z metod dokładnych;
4. wyznacz dwie pierwsze iteracje w metodzie iteracji prostej;
5. wyznacz dwie pierwsze iteracje w metodzie Seidela;
6. porównaj wyniki otrzymane w punktach 3., 4. i 5.

$$a) \begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 8x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + 8x_3 = 4 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} -4x_1 - x_2 + \quad +x_4 = 4 \\ \quad -2x_2 - x_3 \quad = 1 \\ \quad \quad x_2 + 2x_3 \quad = 4 \\ \quad \quad x_2 + 3x_3 - 8x_4 = -1 \end{cases}$$

zad. 2) Prędkość rakiety, zanotowana w trzech momentach czasu wynosi:

$$v(5) = 106,8 \text{ m/s}$$

$$v(8) = 177,2 \text{ m/s}$$

$$v(12) = 279,2 \text{ m/s}$$

Wartość prędkości jest przybliżana funkcją  $v(t) = a_1 t^2 + a_2 t + a_3$  dla  $t \in [5,12]$ . O ile to możliwe, za pomocą metody Seidela wyznacz wartości współczynników  $a_1, a_2, a_3$ . Jako początkowe oszacowanie przyjmij  $a^{(0)} = [1 \ 2 \ 5]^T$  i wyznacz dwie pierwsze iteracje.

zad. 3) Zapisać uproszczoną macierz Google'a dla sieci:

a)  $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 1, 4 \rightarrow 2;$

b)  $1 \rightarrow 4, 1 \rightarrow 5, 1 \rightarrow 6, 2 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 5, 5 \rightarrow 1, 5 \rightarrow 6, 6 \rightarrow 1,$   
 $6 \rightarrow 4$

Stosując metodę iteracji prostej do odpowiedniego układu równań oszacować wartość wag i sporządzić ranking stron (na podstawie czterech pierwszych iteracji). Wyniki porównać z rankingami wynikającymi z zastosowania metod dokładnych. Ile iteracji zapewnia wiarygodność rankingu otrzymanego metodą iteracyjną z dokładnością do czterech miejsc po przecinku?

zad. 4) Restauracja zaopatruje kuchnię w trzy składniki. Stosując metodę Seidela ustalić ceny jednostkowe poszczególnych składników, jeżeli wiadomo, że:

cena dwóch kompletów tych dóbr wynosi 3,25 zł;

dwa opakowania pierwszego składnika i sześć opakowań drugiego składnika kosztuje 5,05zł;

koszt dwóch opakowań pierwszego składnika oraz pięć jednostek trzeciego składnika wynosi 3,5zł.

#### IV. Odpowiedzi

zad. 1)

a)

1.  $\|D\|_1 = \frac{1}{4}$

2.  $k = 15$

3.  $X = [0,4 \ 0,4 \ 0,4]^T$

4.  $X^{(1)} = [0,375 \ 0,375 \ 0,375]^T,$

$X^{(2)} = [0,40625 \ 0,40625 \ 0,40625]^T;$

5.  $X^{(1)} = [0,375000 \ 0,390625 \ 0,404297]^T,$

$X^{(2)} = [0,400635 \ 0,399384 \ 0,399998]^T;$

b)

1.  $\|D\|_\infty = \frac{1}{2}$

2.  $k = 31$

3.  $X = [-0,25 \ -2 \ 3 \ 1]^T$

4.  $X^{(1)} = [-0,843750 \ -1,5 \ 2,25 \ 0,8125]^T,$

$$\begin{aligned}
 X^{(2)} &= [-0,421875 \quad -1,625 \quad 2,75 \quad 0,78125]^T; \\
 5. X^{(1)} &= [-0,84375 \quad -1,5 \quad 2,75 \quad 0,96875]^T, \\
 X^{(2)} &= [-0,3828125 \quad -1,875 \quad 2,9375 \quad 0,9921875]^T.
 \end{aligned}$$

zad. 2) Układ równań generowany przez dane zadania to:

$$\begin{cases} 25a_1 + 5a_2 + a_3 = 106,8 \\ 64a_1 + 8a_2 + a_3 = 177,2 \\ 144a_1 + 12a_2 + a_3 = 279,2 \end{cases}$$

Macierz główna układu nie spełnia żadnego z podanych w wykładzie kryteriów zbieżności, więc nie ma gwarancji zbieżności metody do rozwiązania dokładnego

zad. 3) Możliwe rozwiązania:

a) Dla  $w_4 = 2$ , z pominięciem ostatniego równania dostajemy układ:

$$\begin{cases} -w_1 + \frac{1}{2}w_3 = -1 \\ w_1 - w_2 = -1 \\ w_2 - w_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (W_1 + W_2) \\ (W_1 + W_2 + W_3) \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \quad \begin{cases} -w_1 + \frac{1}{2}w_3 = -1 \\ -w_2 + \frac{1}{2}w_3 = -2 \\ -\frac{1}{2}w_3 = -2 \end{cases}$$

Ranking na podstawie rozwiązania dokładnego: (2 = 3,1,4)

Ranking na podstawie rozwiązania przybliżonego: (2 = 3,1,4)

$$k_{min} = 1$$

b) Dla  $w_4 = 6$ , z pominięciem pierwszego równania dostajemy układ spełniający założenia zbieżności procedury iteracyjnej:

$$\begin{cases} -w_1 + \frac{1}{2}w_2 + \frac{1}{2}w_3 + \frac{1}{2}w_5 + \frac{1}{2}w_6 = -1 \\ -w_2 = -1 \\ \frac{1}{2}w_2 - w_3 = -1 \\ \frac{1}{3}w_1 + \frac{1}{2}w_6 = 5 \\ \frac{1}{3}w_1 - w_5 = -1 \\ \frac{1}{3}w_1 + \frac{1}{2}w_3 + \frac{1}{2}w_5 - w_6 = -1 \end{cases} \quad \begin{matrix} (W_4) \\ (W_1 \leftrightarrow W_6) \\ (W_1 + W_6 - W_4) \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \quad \begin{cases} -\frac{5}{3}w_1 + \frac{1}{2}w_2 + \frac{1}{2}w_6 = -7 \\ -w_2 = -1 \\ \frac{1}{2}w_2 - w_3 = -1 \\ \frac{1}{3}w_1 - w_5 = -1 \\ \frac{1}{3}w_1 + \frac{1}{2}w_6 = 5 \end{cases}$$

Ranking na podstawie rozwiązania przybliżonego: (1,4 = 6,5,3,2)

Ranking na podstawie rozwiązania dokładnego: (1,4,6,5,3,2)

$$k_{min} = 31$$

zad. 4) Układ równań dyktowany przez dane zadania jest postaci:

$$\begin{cases} 2p_1 + 2p_2 + 2p_3 = 3,25 \\ 2p_1 + 6p_2 = 5,05 \\ 2p_1 + 5p_3 = 3,5 \end{cases}$$

Macierz główna tego układu spełnia założenia zbieżności metod iteracyjnych. Ceny jednostkowe dóbr wynoszą odpowiednio  $p_1 = 0,3125$ ,  $p_2 = 0,7375$ ,  $p_3 = 0,5750$  (oszacowane na podstawie 70-tej iteracji 😊)