



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIWERSYTET  
EKONOMICZNY  
W KRAKOWIE



EDUKACJA  
DLA  
PRZEDSIĘBIORCZOŚCI

UNIA EUROPEJSKA  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt „Uruchomienie unikatowego kierunku studiów Informatyka Stosowana odpowiedzią na zapotrzebowanie rynku pracy”  
jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

# Metody numeryczne

materiały do ćwiczeń  
dla studentów

## 1. Teoria błędów, notacja $O$

- 1.1. Błąd bezwzględny, błąd względny
- 1.2. Ogólna postać błędu
- 1.3. Problem odwrotny teorii błędów
  - zasada równego wpływu
  - metoda równych kresów górnych błędów bezwzględnych
  - metoda jednakowego pomiaru
- 1.4. Notacja  $O$

## I. Wiadomości wstępne

Wymagana jest znajomość następujących pojęć:

- pochodna funkcji;
- pochodna cząstkowa funkcji wielu zmiennych;
- różniczka funkcji wielu zmiennych;
- rozwinięcie Taylora funkcji wielu zmiennych;

oraz umiejętności:

- obliczania pochodnych;
- obliczania pochodnych cząstkowych.

Obliczenia prowadzimy z dokładnością do (co najmniej) czterech miejsc po przecinku, o ile treść zadania nie podaje innej dokładności.

## II. Zadania

zad. 1) Wyznaczyć błąd bezwzględny  $\Delta a$  oraz błąd względny  $\delta a$ , gdy liczba  $A$  jest przybliżana przez jej obcięcie do czterech miejsc po przecinku. Jakie są kres górny błędu bezwzględnego  $\Delta_a$  oraz kres górny błędu względnego  $\delta_a$  (z dokładnością do pięciu miejsc po przecinku)?

- a)  $A = 0,321947$ ,
- b)  $A = e \approx 2,7182818$ ,

zad. 2) Dysk twardy w pewnym komputerze ma pojemność 120000 MB. Użytkownik tego komputera oszacował, że dysk pomieści około 120 GB danych. Wiedząc, że 1 GB = 1024 MB, oblicz rzeczywistą pojemność dysku w GB, a potem błąd bezwzględny i względny szacowania pojemności dysku w GB.

zad. 3) Obliczyć kresy górne błędów bezwzględnego i względnego wartości zagregowanego popytu obliczanych przy zaokrąglonych cenach, gdy popyt jest opisany formułą

$$Q(p_1, p_2, p_3) = \frac{2}{p_1} + \frac{3}{p_2} + \frac{4}{p_3},$$

a ceny towarów wynoszą  $p_1 = 2 \pm 0,01$ ,  $p_2 = 3 \pm 0,12$ ,  $p_3 = 2 \pm 0,1$ .

zad. 4) Objętość 1 kilograma pewnego gazu w zależności od (wyrażonej w molach) liczby cząsteczek trzech jego składowych:  $x$ ,  $y$  i  $z$  wyraża się wzorem

$$V(x, y, z) = x^2 z + \sqrt{\frac{x}{y}}$$

Obliczyć kresy górne błędów bezwzględnego i względnego popełnianych przy obliczaniu objętości kilograma gazu, jeśli liczby cząsteczek składowych tego gazu wynoszą  $x = 4 \pm 0,04$ ,  $y = 1 \pm 0,02$ ,  $z = 2 \pm 0,01$ ,

zad. 5) Pole powierzchni działki trójkątnej można obliczyć przy pomocy wzoru Herona

$$P(a, b, c) = \frac{1}{4} \sqrt{4a^2 b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2},$$

gdzie  $a$ ,  $b$ ,  $c$  to długości krawędzi działki. Z jaką dokładnością należy znać wartości  $a \approx 3m$ ,  $b \approx 4m$ ,  $c \approx 5m$ , by pole powierzchni działki było obliczone z dokładnością 0,1? Wyniki podać w oparciu o metody: jednakowo dokładnego pomiaru, równych kresów górnych błędów bezwzględnego i równego wpływu.

zad. 6) Promień podstawy walca wynosi  $r \approx 2cm$ , a wysokość walca  $h \approx 3cm$ . Z jaką dokładnością należy określić  $r$ ,  $h$  oraz  $\pi$ , aby objętość walca obliczyć z dokładnością do  $0,1cm^3$  (Za przybliżenie początkowe  $\pi$  przyjmij wartość 3,14)?

zad. 7) W związku ze zbliżającym się końcem okresu wsparcia dla systemu operacyjnego Okna XL, administrator sieci uniwersyteckiej planuje aktualizację oprogramowania na podległych mu maszynach. W tym celu przygotowuje on listę  $n$  systemów operacyjnych, wraz z możliwością posortowania listy ze względu na różne kryteria. Administrator rozważa implementację jednego z następujących algorytmów sortujących:

- a) Sortowanie przez wstawianie: w  $k$ -tym kroku ( $1 \leq k \leq n$ ) mamy posortowane pierwsze  $k - 1$  elementów listy. Wybieramy  $k$ -ty element listy i wstawiamy go we właściwe miejsce poprzez porównanie go z elementami już posortowanymi.
- b) Sortowanie przez wybieranie: w  $k$ -tym kroku ( $1 \leq k \leq n$ ) mamy posortowane  $k - 1$  najmniejszych elementów listy. Spośród pozostałych elementów wybieramy najmniejszy i zamieniamy go w liście z elementem na pozycji  $k$ -tej.

Wyznacz złożoność obliczeniową tych algorytmów (oblicz liczbę wykonywanych operacji porównywania) i wskaż lepszy z nich (pod względem złożoności).

zad. 8) Wyznacz liczbę operacji mnożenia oraz liczbę operacji dodawania wykonywanych podczas rozwiązywania układu  $n$  równań liniowych o  $n$  niewiadomych metodą eliminacji Gaussa-Jordana i na tej podstawie podaj złożoność obliczeniową algorytmu.

### III. Zadania do samodzielnego rozwiązania

zad. 1) Wyznaczyć błąd bezwzględny  $\Delta a$  oraz błąd względny  $\delta a$ , gdy liczba  $A$  jest przybliżana przez liczbę  $a$ . Jakie są kres górny błędu bezwzględnego  $\Delta a$  oraz kres górny błędu względnego  $\delta a$  (z dokładnością do czterech miejsc po przecinku)?

- a)  $A = 1,129124, a = 1,12;$
- b)  $A = 1,129124, a = 1,13;$
- c)  $A = \pi, a = 3,14$

zad. 2) Obliczyć błędy bezwzględny i względny wartości podanych funkcji obliczanych dla wskazanych wartości argumentów.

- a)  $f(x, y) = \ln x + \ln y, x = 10 \pm 0,001, y = \frac{1}{10} \pm 0,0001;$
- b)  $f(x, y, z) = (x + y)^2 + (y + z)^2 - (x + z)^2, x = 1 \pm 0,02, y = -1 \pm 0,03, z = 3 \pm 0,02.$

zad. 3) Zgodnie z prawem powszechnego ciążenia dwa ciała o masach  $M \text{ kg}$  i  $m \text{ kg}$  odległe od siebie o  $r$  metrów przyciągają się wzajemnie z siłą

$$F(M, m, r) = \frac{GMm}{r^2},$$

gdzie przyjmujemy, że  $G = \frac{20}{3} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$ . Oblicz błąd bezwzględny i względny siły przyciągania ciał o masach  $M = 4 \pm \frac{9}{100} \text{ kg}$ ,  $m = 2 \pm \frac{3}{100} \text{ kg}$  i odległych o  $r = 2 \pm \frac{12}{1000} \text{ m}$ .

zad. 4) Dana jest funkcja  $f$  i przybliżone wartości argumentów. Z jaką dokładnością należy określić wartości  $x, y$  oraz  $z$ , aby obliczyć wartość  $f$  z dokładnością  $0,03$ ? Zadanie rozwiązać trzema metodami i porównać otrzymane wyniki.

- a)  $f(x, y, z) = y - xyz, x \approx 2, y \approx 5, z \approx 1;$
- b)  $f(x, y, z) = e^{x+y+z}(x^2 + y^2 + z^2), x \approx 1, y \approx 0, z \approx -1.$

zad. 5) Z Centrum Lotów Kosmicznych w Krakowie przyszło polecenie, aby skorygować położenie stacji kosmicznej *Miś*, znajdującej się na orbicie okołoziemskiej. W celu zmiany położenia stacji należy posłużyć się trzema silnikami manewrowymi. Czas działania każdego z silników powinien wynieść  $x \approx 2$  minuty,  $y \approx 4$  minuty,  $z \approx 3$  minuty. Zmianę położenia stacji (w metrach), powstałą w wyniku działania silników, opisuje funkcja:

$$f(x, y, z) = xy + yz - xz.$$

Oblicz z jaką dokładnością należy określić wielkości  $x, y$  i  $z$  tak, aby korekta położenia stacji nie spowodowała błędu położenia przekraczającego  $0,3$  metra. Zadanie rozwiąż metodami równego wpływu, równych kresów i pomiaru jednakowo dokładnego, a wynik podaj w sekundach.

zad. 6) Wyznacz liczbę operacji mnożenia oraz liczbę operacji dodawania wykonywanych podczas wyznaczania:

- a) macierzy odwrotnej do macierzy  $n \times n$  metodą eliminacji Gaussa-Jordana;
- b) rzędu macierzy  $n \times n$  metodą eliminacji Gaussa;

i na tej podstawie podaj złożoność obliczeniową algorytmu.

#### IV. Odpowiedzi

zad. 1)

- a)  $\Delta a = 0,009124$ ,  $\Delta_a = 0,0092$   
 $\delta a \approx 0,00808$ ,  $\delta_a = 0,0081$
- b)  $\Delta a = 0,000876$ ,  $\Delta_a = 0,0009$   
 $\delta a \approx 0,000776$ ,  $\delta_a = 0,0008$
- c)  $\Delta a = \pi - 3,14 \approx 0,0015926535$ ,  $\Delta_a = 0,0016$   
 $\delta a = \frac{\pi - 3,14}{\pi} \approx 0,000506957$ ,  $\delta_a = 0,0006$

zad. 2)

- a)  $|\Delta f| = 0,0011$ ,  $f(x, y) = 0 \pm 0,0011$ ,  $\delta f$  – nie można zastosować
- b)  $|\Delta f| = 0,36$ ,  $f(x, y, z) = -12 \pm 0,36$ ,  $\delta f = 0,03$

zad. 3) Odpowiedź:

$$\Delta F = \frac{66 \text{ kg m}}{100 \text{ s}^2}, \delta F = \frac{99}{2000} = 4,95\%$$

zad. 4)

zasada równego wpływu:

- a)  $\Delta_x = 0,002$ ,  $\Delta_y = 0,01$ ,  $\Delta_z = 0,001$
- b) nie można zastosować ( $f'_z(1,0,-1) = 0$ )

metoda równych kresów górnych błędów bezwzględnych

- a)  $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0,001875$ ;
- b)  $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0,005$

metoda pomiaru jednakowo dokładnego

- a)  $\Delta_x = 0,0024$ ,  $\Delta_y = 0,006$ ,  $\Delta_z = 0,0012$
- b)  $\Delta_x = 0,0075$ ,  $\Delta_y = 0$ ,  $\Delta_z = 0,0075$

zad. 5)

metoda równego wpływu:  $\Delta_x = 6$  sekund,  $\Delta_y = \frac{6}{5}$  sekundy,  $\Delta_z = 3$  sekundy

metoda równych kresów górnych:  $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = \frac{9}{4}$  sekundy

pomiar jednakowo dokładny:  $\Delta_x = \frac{9}{7}$  sekundy,  $\Delta_y = \frac{18}{7}$  sekundy,  $\Delta_z = \frac{27}{14}$  sekundy

zad. 6)

a) liczba operacji mnożenia:

$$\sum_{k=1}^n [n - (k - 1) + (n - (k - 1))(n - 1)] + \sum_{k=1}^n [n + n(n - 1)] = \frac{1}{2} n^2 (3n + 1),$$

liczba operacji dodawania:

$$\sum_{k=1}^n (n - (k - 1))(n - 1) + \sum_{k=1}^n n(n - 1) = \frac{1}{2} (n - 1)n(3n + 1),$$

łączna liczba operacji:  $\frac{1}{2} n(2n - 1)(3n + 1)$ ,

złożoność obliczeniowa:  $O(n^3)$ .

b) liczba operacji mnożenia:

$$\sum_{k=1}^n (n - (k - 1))(n - 1 - (k - 1)) = \frac{1}{3} (n - 1)n(n + 1),$$

liczba operacji dodawania:

$$\sum_{k=1}^n (n - (k - 1))(n - 1 - (k - 1)) = \frac{1}{3} (n - 1)n(n + 1),$$

łączna liczba operacji:  $\frac{2}{3} (n - 1)n(n + 1)$ ,

złożoność obliczeniowa:  $O(n^3)$ .